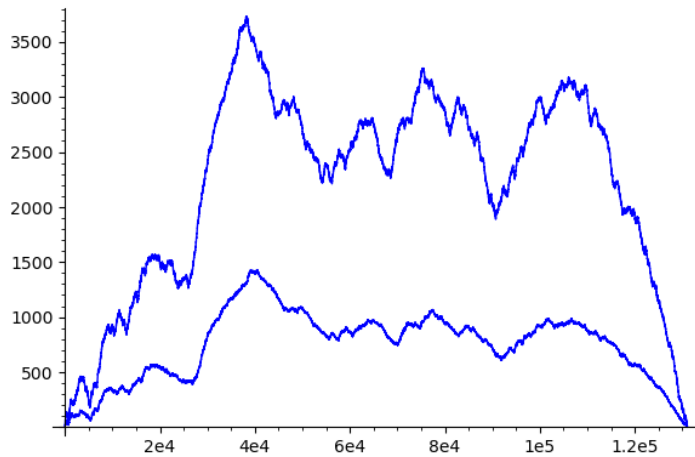
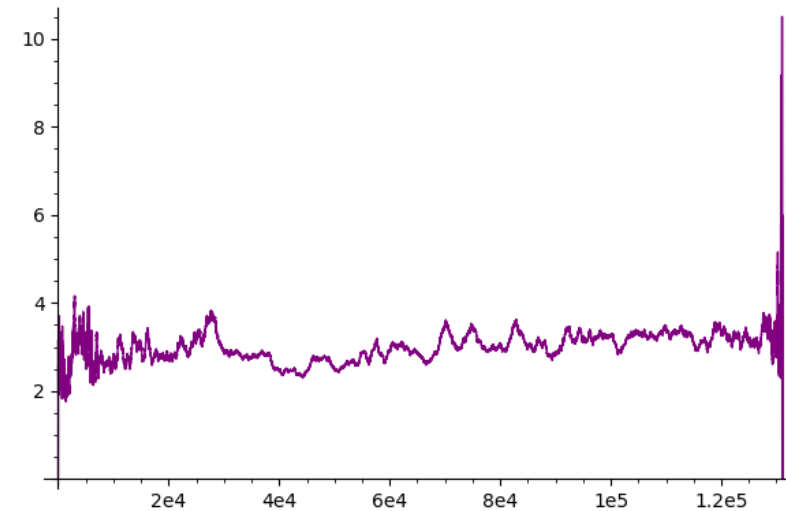
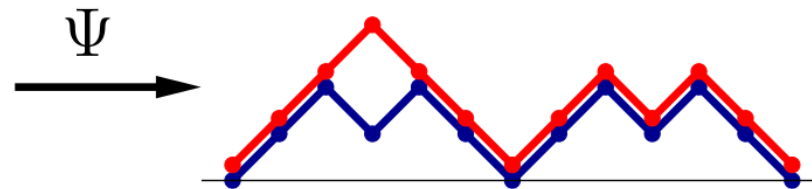
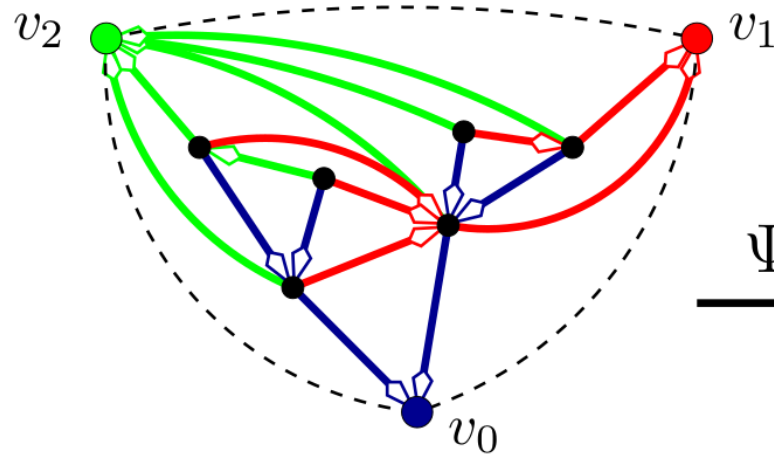


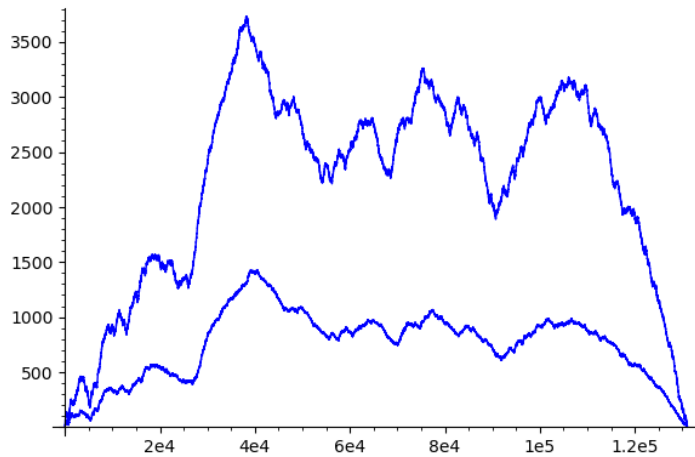
# Sur la normalisation des intervalles de Tamari aléatoires et des bois de Schnyder des triangulations aléatoires (avec une astuce D-finie asymptotique)



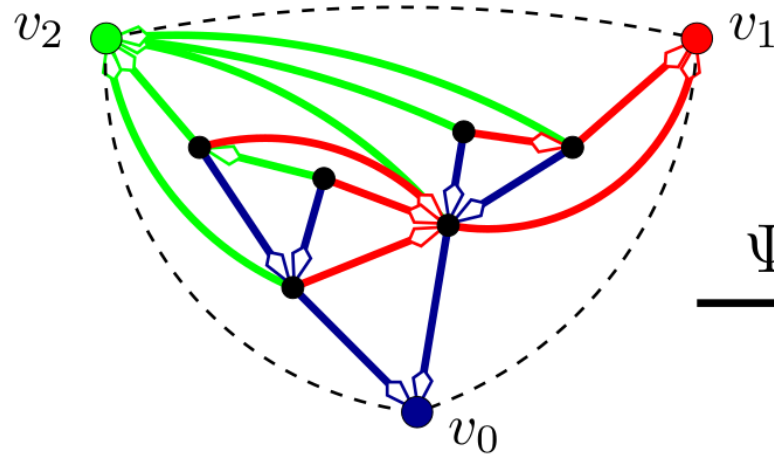
Guillaume Chapuy  
(CNRS – IRIF – Université Paris Cité)



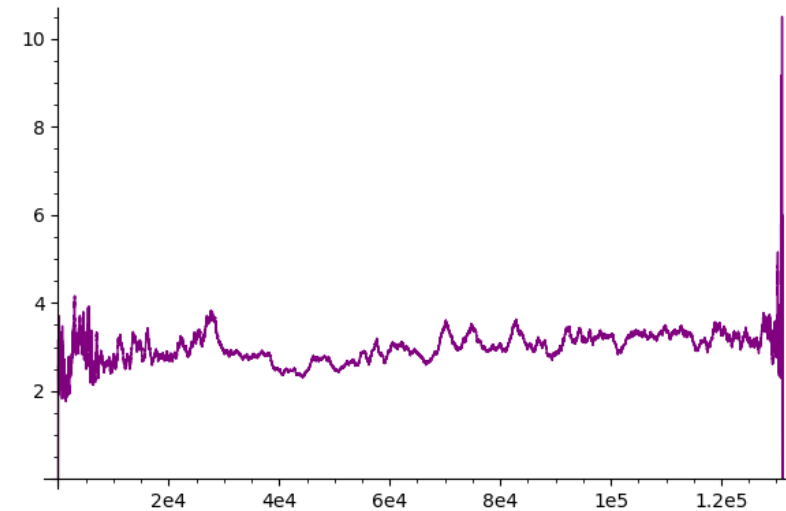
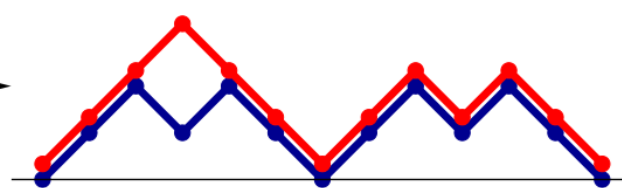
# Sur la normalisation des intervalles de Tamari aléatoires et des bois de Schnyder des triangulations aléatoires (avec une astuce D-finie asymptotique)



Guillaume Chapuy  
(CNRS – IRIF – Université Paris Cité)

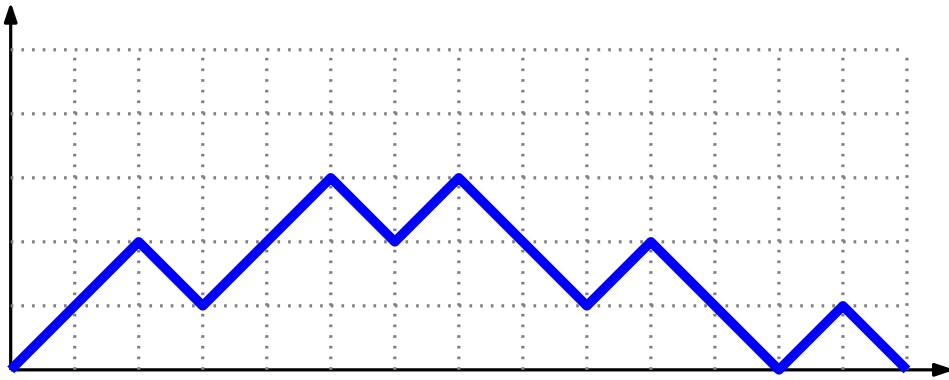


$\Psi$



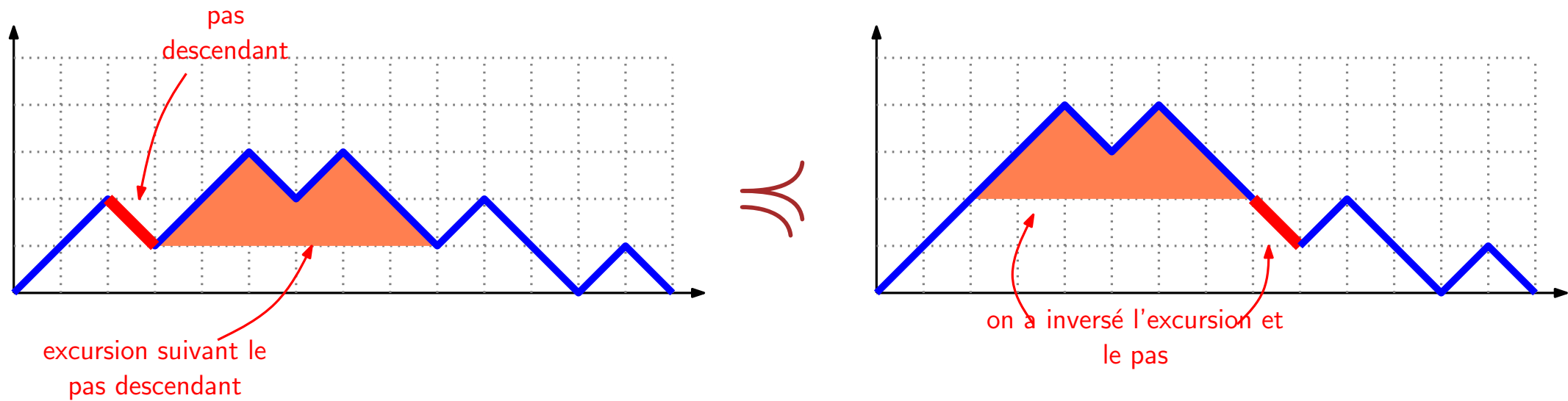
# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .



# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

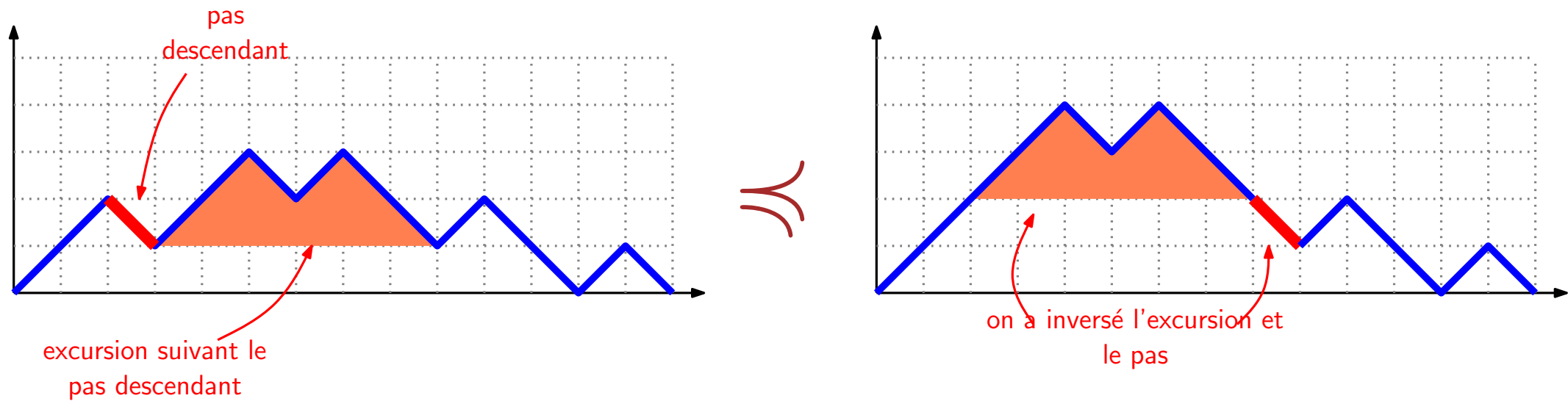
- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .
- Relation d'ordre de Tamari:



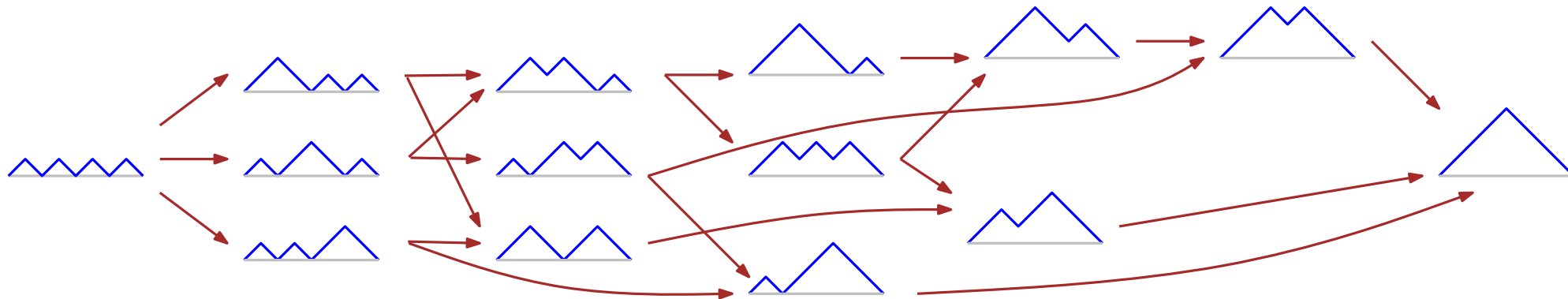
# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .

- Relation d'ordre de Tamari:



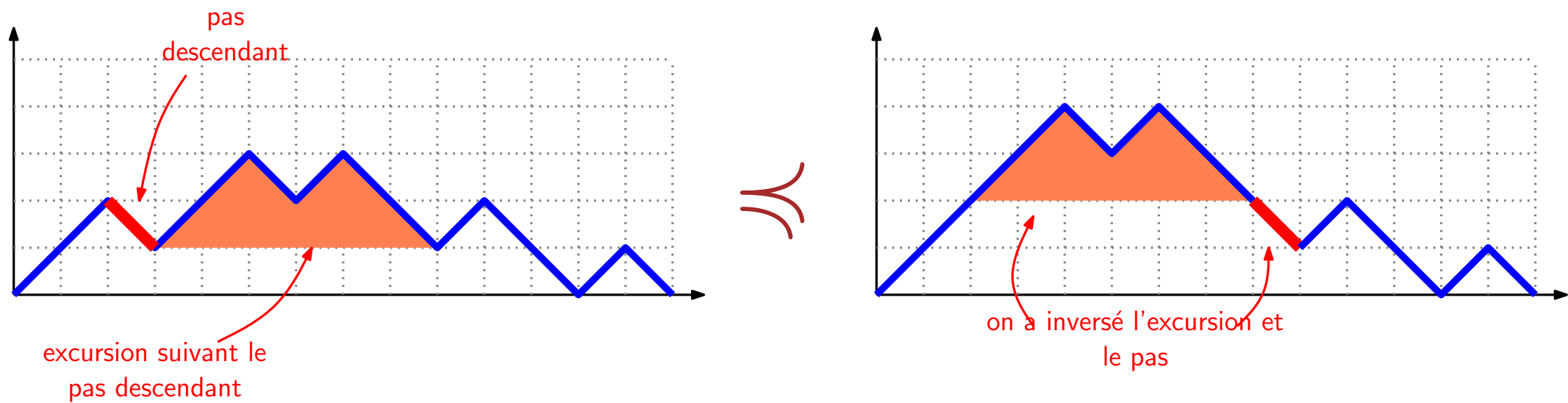
- C'est le fameux ordre de Tamari



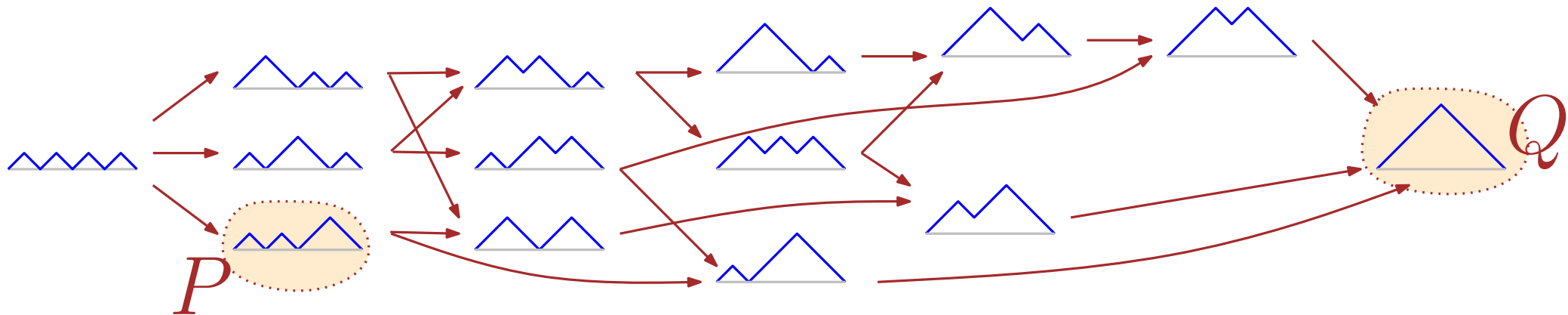
# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .

- Relation d'ordre de Tamari:



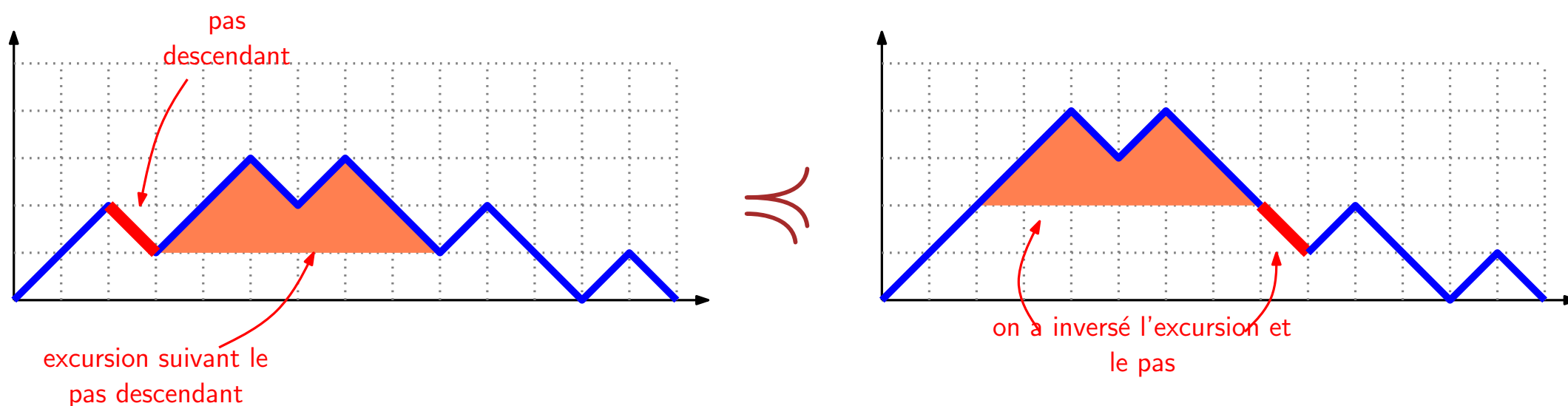
- C'est le fameux ordre de Tamari



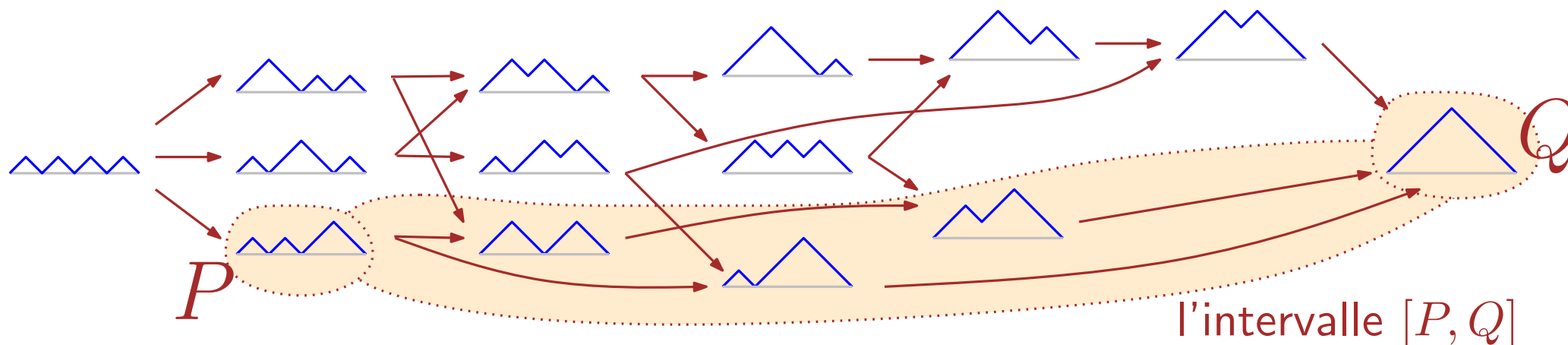
# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .

- Relation d'ordre de Tamari:



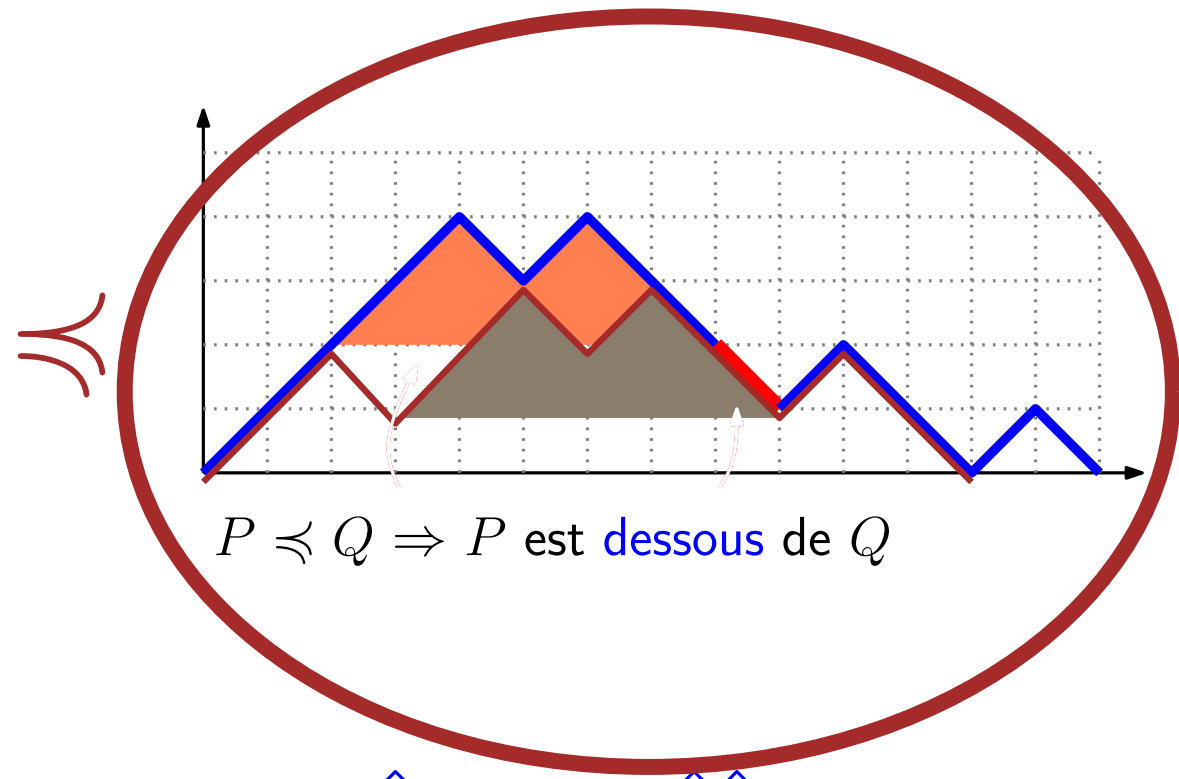
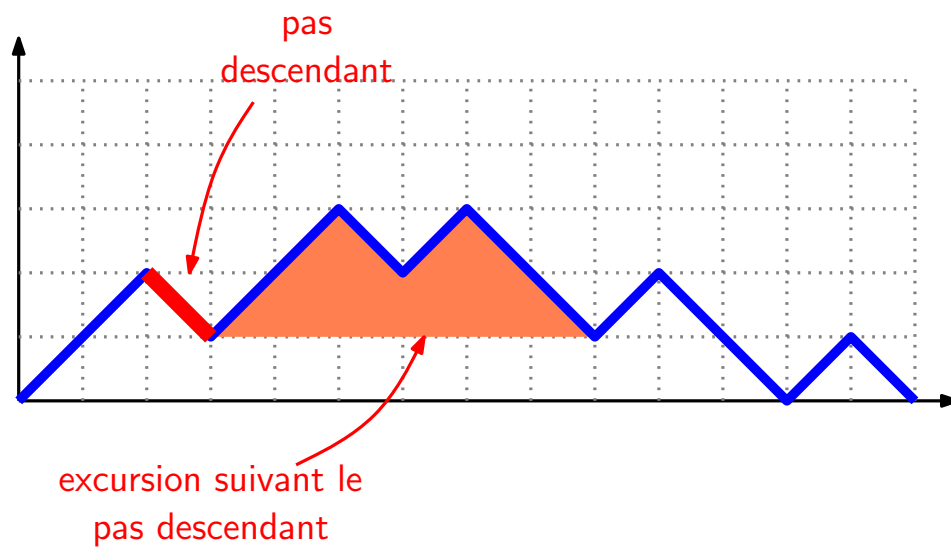
- C'est le fameux ordre de Tamari



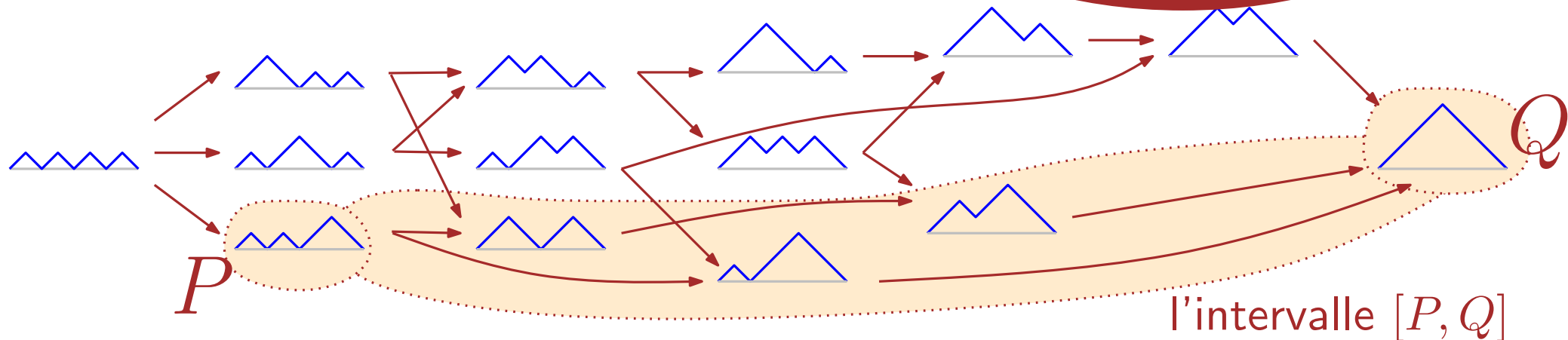
# Chemins de Dyck et treillis de Tamari

- Chemin de Dyck: pas  $\pm 1$ , va de 0 à 0, reste  $\geq 0$ , longueur:  $2n$ .

- Relation d'ordre de Tamari:

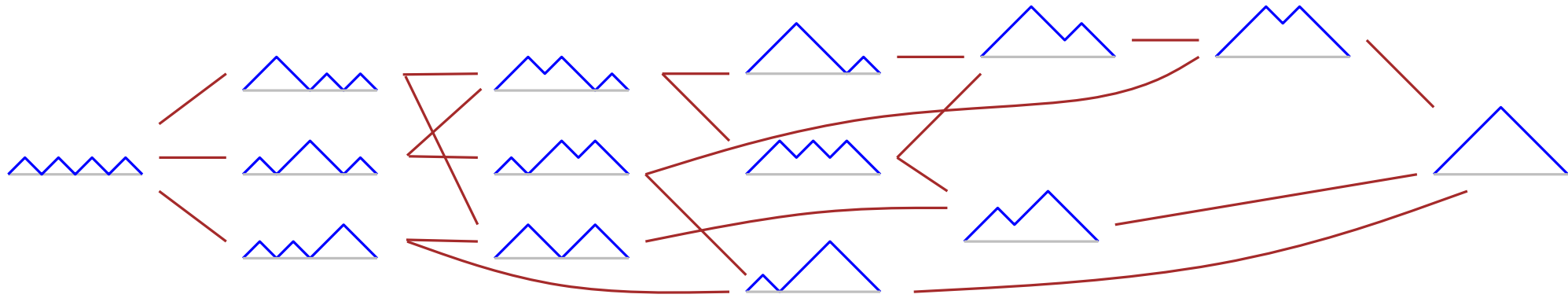


- C'est le fameux ordre de Tamari





# Chemins de Dyck et treillis de Tamari - (parenthèse)



- Graphe à  $Cat(n)$  sommets
- Le **temps de mélange** de la marche aléatoire simple est inconnu!  
(conjecture  $O(n^{3/2})$  Aldous 1990's)
- Le **diamètre** est  $2n - o(n)$  [Sleator-Thurston-Tarjan, Pournin], connections mystérieuses avec la géométrie hyperbolique!

# Énumération d'intervalles

- [Chapoton 06] Le nombre de paires  $[P, Q]$  telles que  $P \preceq Q$  est:

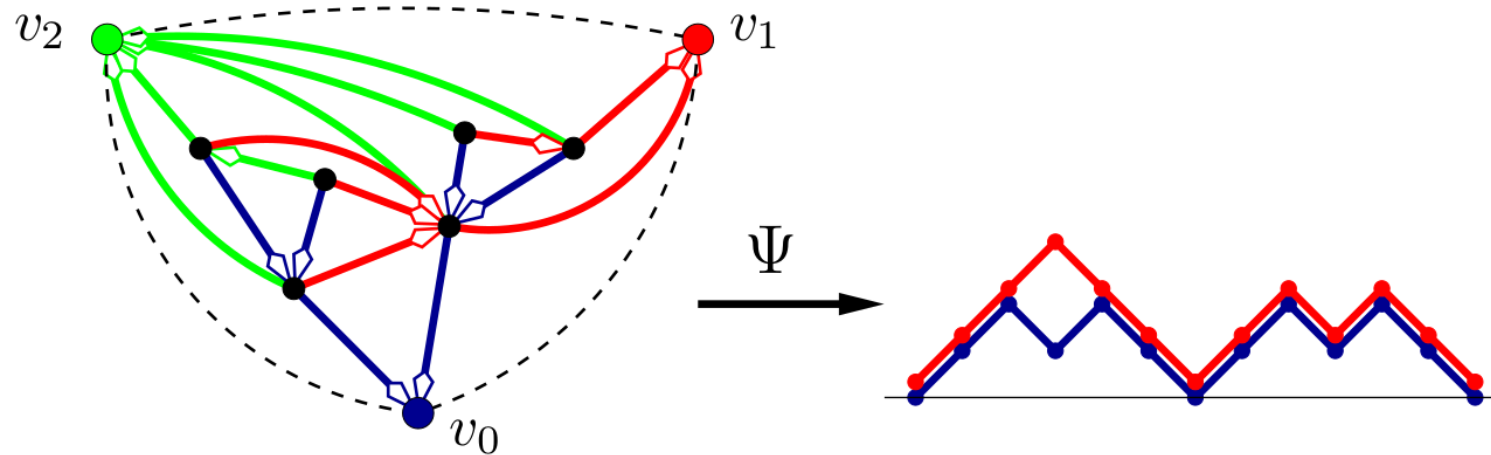
$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

# Énumération d'intervalles

- [Chapoton 06] Le nombre de paires  $[P, Q]$  telles que  $P \preceq Q$  est:

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

- ... c'est joli. C'est aussi le nombre de triangulations planaires 3-connexes à  $n+2$  sommets [Tutte 62, Bernardi-Bonichon 09]. La bijection de Bernardi-Bonichon passe par les bois de Schnyder des triangulations:

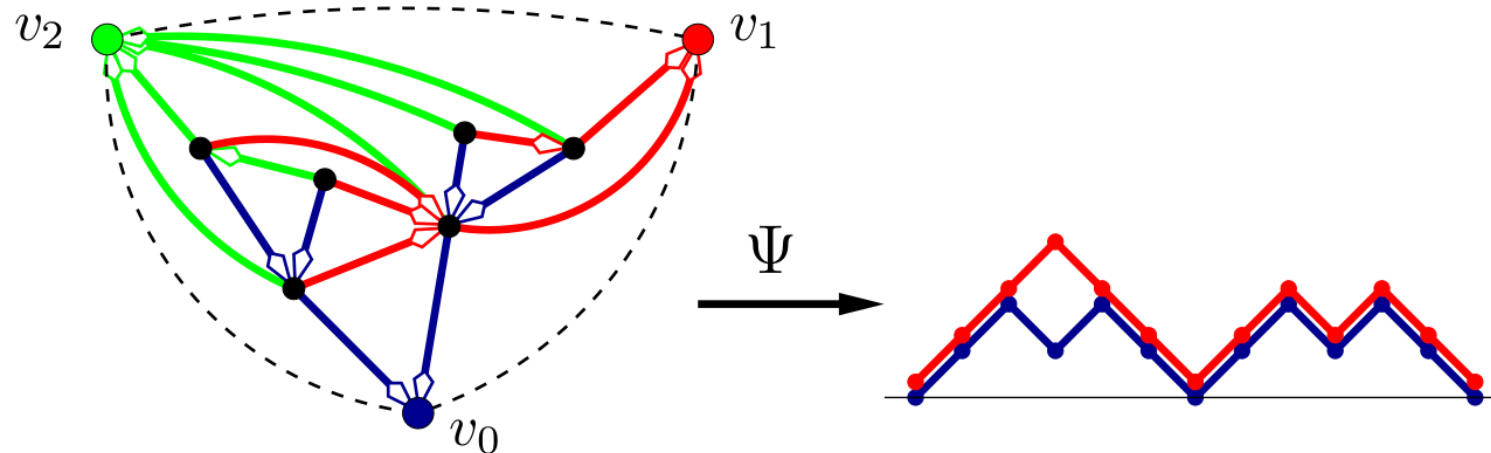


# Énumération d'intervalles

- [Chapoton 06] Le nombre de paires  $[P, Q]$  telles que  $P \preceq Q$  est:

$$I_n = \frac{2}{n(n+1)} \binom{4n+1}{n-1}.$$

- ... c'est **joli**. C'est aussi le nombre de **triangulations** planaires 3-connexes à  $n+2$  sommets [Tutte 62, Bernardi-Bonichon 09]. La bijection de Bernardi-Bonichon passe par les **bois de Schnyder** des triangulations:



- Ce n'est **que le début** de riches analogies entre intervalles de Tamari et cartes... voir travaux de [Fang] et collaborateurices. Et aussi [MBM-GC-LFPR]

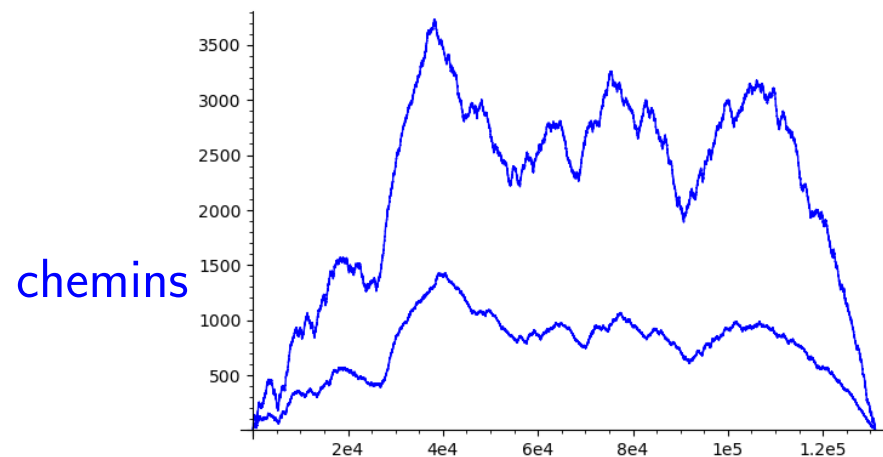
$$(n+1)^{l-2} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \binom{2\lambda_i}{\lambda_i} \quad \text{vs} \quad 2(n-1)^{\ell(\lambda)-2} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \binom{2\lambda_i-1}{\lambda_i}$$

# Intervalle de Tamari aléatoires (?)

• **Théorème [C'24]**. Soit  $(P_n, Q_n)$  un intervalle de Tamari aléatoire choisi uniformément dans  $\mathcal{I}_n$ . Soit  $I \in [0, 2n]$  une abscisse choisie uniformément. Alors:

$$\frac{Q_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow Z, \quad \mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}.$$

Note:  $Z = (XY)^{1/4}$  où  $X \sim \beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$  et  $Y \sim \Gamma(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ .



Simulations: Wenjie Fang.

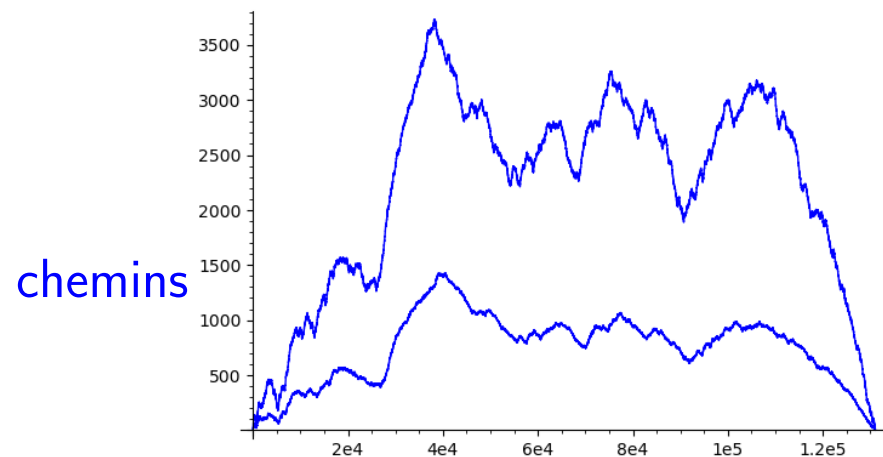
# Intervalle de Tamari aléatoires (?)

• **Théorème [C'24]**. Soit  $(P_n, Q_n)$  un intervalle de Tamari aléatoire choisi uniformément dans  $\mathcal{I}_n$ . Soit  $I \in [0, 2n]$  une abscisse choisie uniformément. Alors:

$$\frac{Q_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow Z, \quad \mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}.$$

Note:  $Z = (XY)^{1/4}$  où  $X \sim \beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$  et  $Y \sim \Gamma(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ .

De plus:  $\frac{P_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow \frac{Z}{3}$ .



Simulations: Wenjie Fang.

# Intervalle de Tamari aléatoires (?)

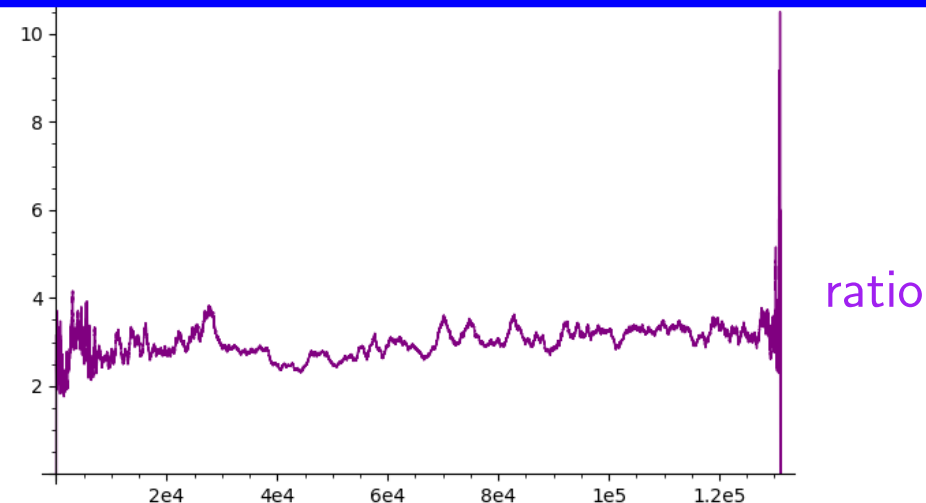
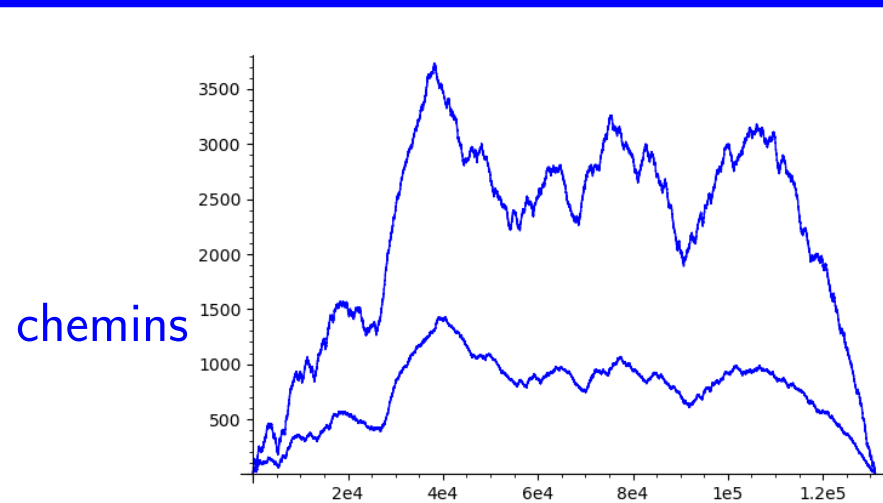
- **Théorème [C'24].** Soit  $(P_n, Q_n)$  un intervalle de Tamari aléatoire choisi uniformément dans  $\mathcal{I}_n$ . Soit  $I \in [0, 2n]$  une abscisse choisie uniformément. Alors:

$$\frac{Q_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow Z, \quad \mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}.$$

Note:  $Z = (XY)^{1/4}$  où  $X \sim \beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$  et  $Y \sim \Gamma(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ .

De plus:  $\frac{P_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow \frac{Z}{3}$ .

- **Théorème [C'24].** On a  $\frac{\tilde{Q}_n(J) - 3\tilde{P}_n(J)}{\sqrt{n}} = O_p(1)$  Et donc  $\tilde{P}_n(J) = (\frac{1}{3} + o(1)) \tilde{Q}_n(J)$ .



Simulations: Wenjie Fang.

# Intervalles de Tamari aléatoires (?)

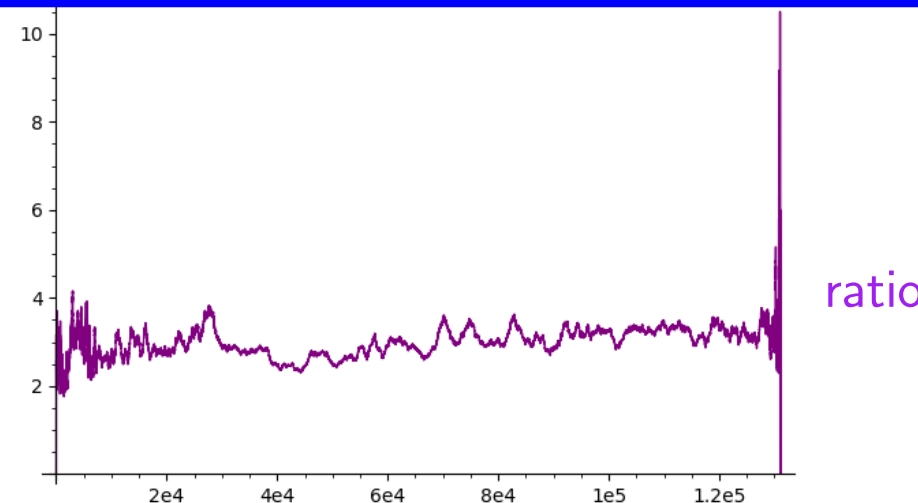
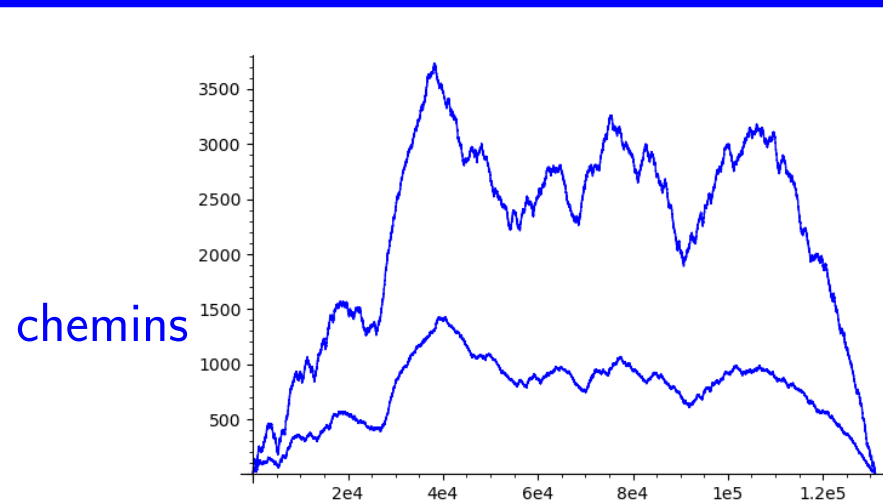
• **Théorème [C'24]**. Soit  $(P_n, Q_n)$  un intervalle de Tamari aléatoire choisi uniformément dans  $\mathcal{I}_n$ . Soit  $I \in [0, 2n]$  une abscisse choisie uniformément. Alors:

$$\frac{Q_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow Z, \quad \mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}.$$

Note:  $Z = (XY)^{1/4}$  où  $X \sim \beta(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$  et  $Y \sim \Gamma(\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ .

De plus:  $\frac{P_n(I)}{n^{3/4}} \longrightarrow \frac{Z}{3}$ . ← donne la hauteur des points typique dans le Schnyder wood canonique d'une triangulation plane aléatoire! (nouveau !)

• **Théorème [C'24]**. On a  $\frac{\tilde{Q}_n(J) - 3\tilde{P}_n(J)}{\sqrt{n}} = O_p(1)$  Et donc  $\tilde{P}_n(J) = (\frac{1}{3} + o(1)) \tilde{Q}_n(J)$ .

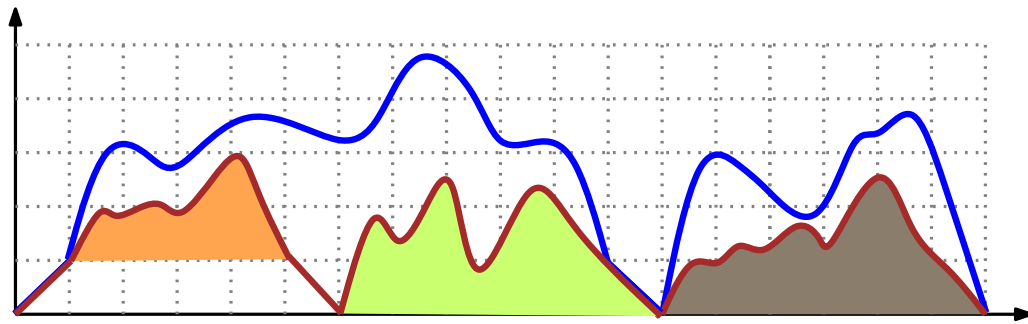


Simulations: Wenjie Fang.

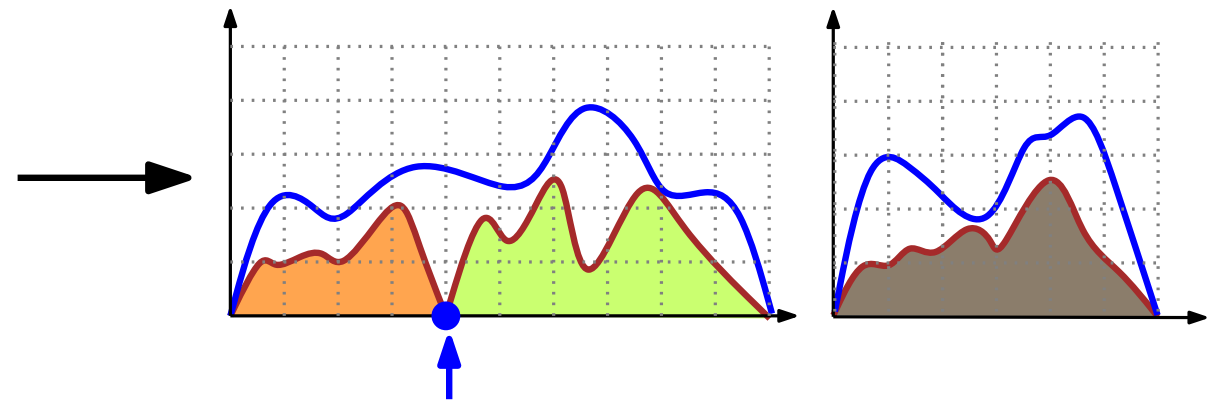


# Énumération (classique) des intervalles de Tamari

[[MBM + Éric Fusy + LFPR]]



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un zéro du chemin bas pointé

Intervalle de Tamari

taille totale  $n$

Série des intervalles:

$$F(t; x)$$

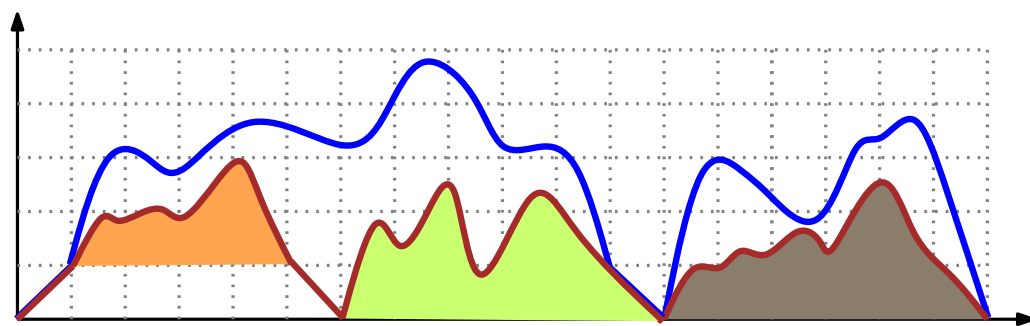
$t$ : taille

$x$ : nombre de zéros du chemin du bas

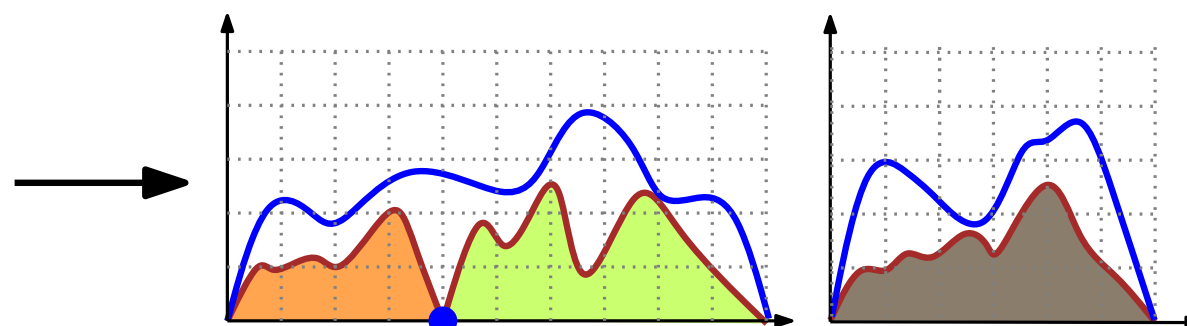
$$F(t; x) =: \sum_{i \geq 0} F_i(t) x^i$$

# Énumération (classique) des intervalles de Tamari

[[MBM + Éric Fusy + LFPR]]



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un zéro du chemin bas pointé

Intervalle de Tamari

taille totale  $n$

Série des intervalles:

$$F(t; x) = x + t \sum_{i \geq 1} F_i(t) \left( x + x^2 + \dots + x^i \right) F(t, x)$$

$t$ : taille

$x$ : nombre de zéros du chemin du bas

$$F(t; x) =: \sum_{i \geq 0} F_i(t) x^i$$

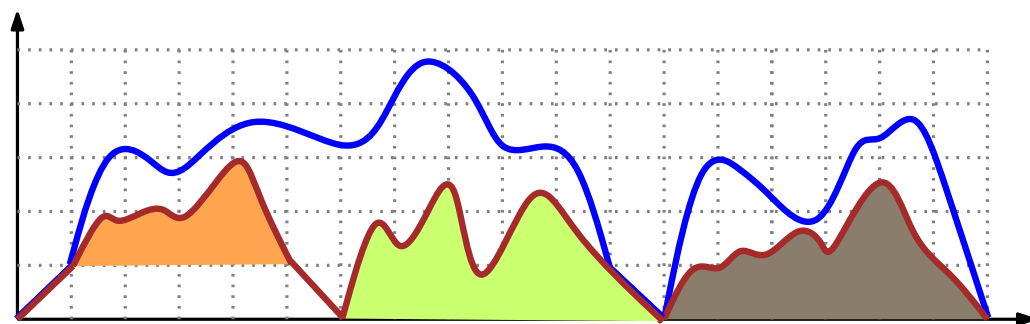
$$= x + tx \sum_{i \geq 1} F_i(t) \frac{x^i - 1}{x - 1} F(t, x)$$

$$= x + tx \frac{F(t, x) - F(t, 1)}{x - 1} F(t, x)$$

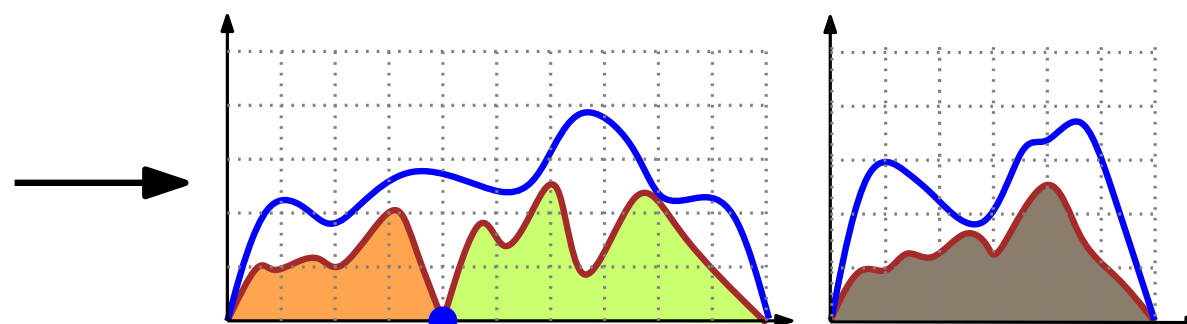
- Équation polynomiale à une variable catalytique. Théorie effective de Bousquet-Mélou–Jehanne, la solution est explicite → thm de Chapoton sur l'énumération.

# Énumération (classique) des intervalles de Tamari

[[MBM + Éric Fusy + LFPR]]



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un zéro du chemin bas pointé

Intervalle de Tamari

taille totale  $n$

Série des intervalles:

$t$ : taille

$x$ : nombre de zéros du chemin du bas

$$F(t; x) =: \sum_{i \geq 0} F_i$$

$$F(x) = \frac{1 + u}{(1 + zu)(1 - z)^3} (1 - 2z - z^2u) \quad , \quad F(1) = \frac{1 - 2z}{(1 - z)^3}$$

$$t = z(1 - z)^3,$$

$$x = \frac{1 + u}{(1 + zu)^2}.$$

- Équation polynomiale à une variable catalytique. Théorie effective de Bousquet-Mélou–Jehanne, la solution est explicite → thm de Chapoton sur l'énumération.

# Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

## Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

On écrit trivialement une équation pour  $H$  en **pointant** la décomposition précédente:

$$H(x) = F(x) + sxt \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} F(x) + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$

# Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

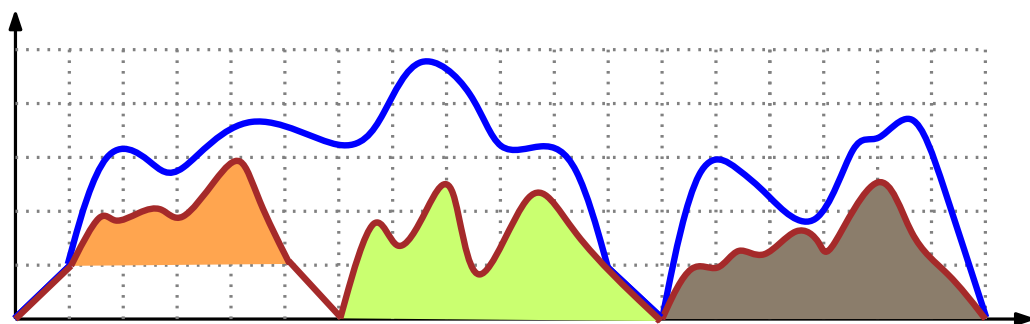
$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

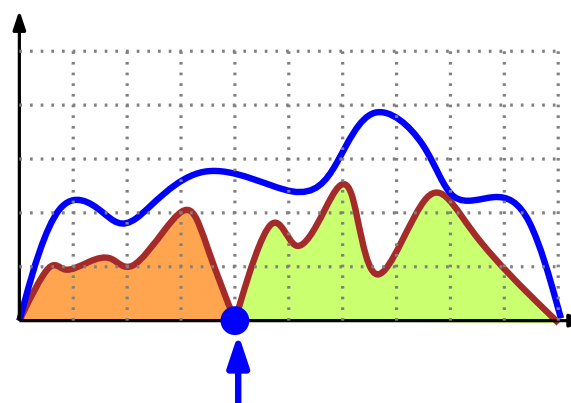
$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

On écrit trivialement une équation pour  $H$  en **pointant** la décomposition précédente:

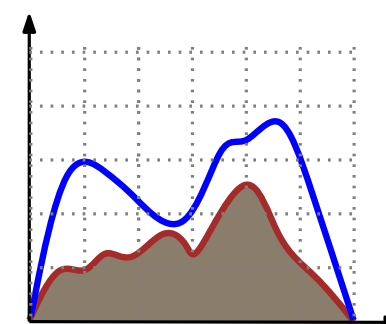
$$H(x) = F(x) + sxt \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} F(x) + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un **zéro du chemin bas pointé**



Intervalle de Tamari

# Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

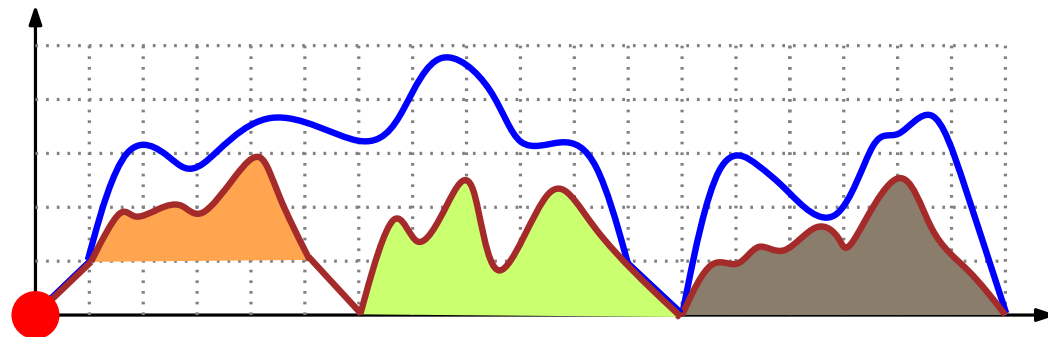
$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

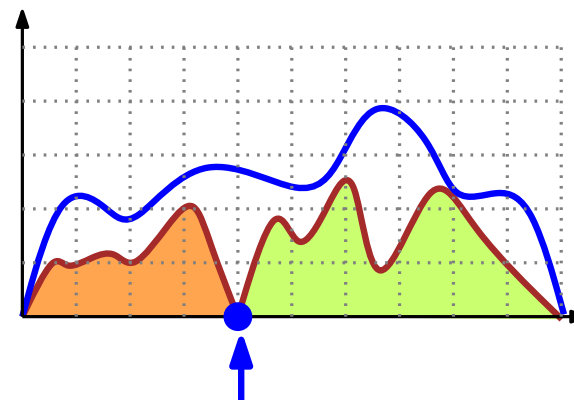
$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

On écrit trivialement une équation pour  $H$  en **pointant** la décomposition précédente:

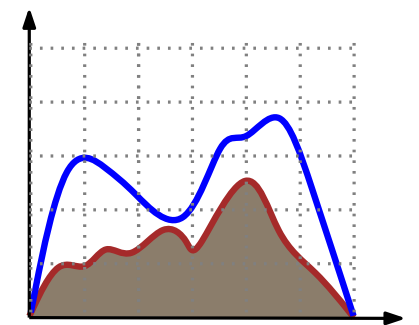
$$H(x) = \boxed{F(x)} + sxt \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} F(x) + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un **zéro du chemin bas pointé**



Intervalle de Tamari

# Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

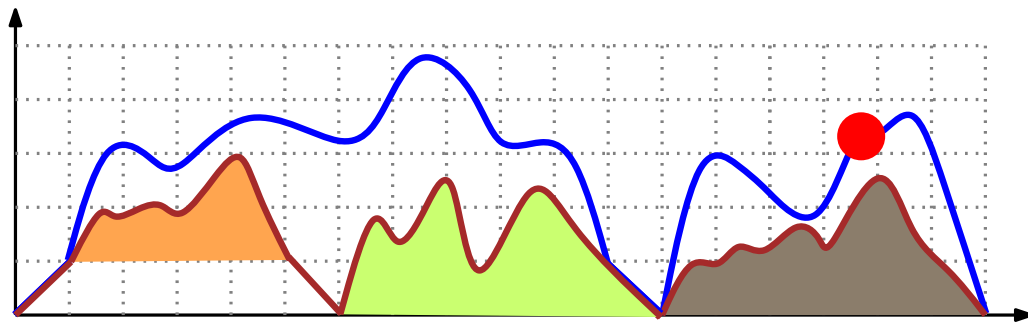
$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

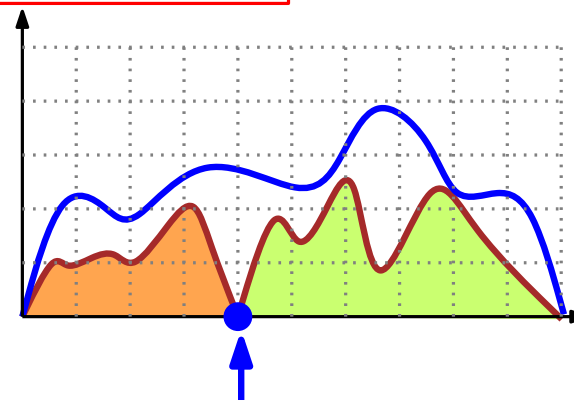
$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

On écrit trivialement une équation pour  $H$  en **pointant** la décomposition précédente:

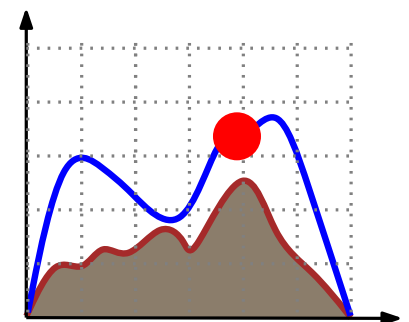
$$H(x) = F(x) + sxt \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} F(x) + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un **zéro du chemin bas pointé**



Intervalle de Tamari



# Modeste contribution: on rajoute un point marqué...

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$t$ : taille

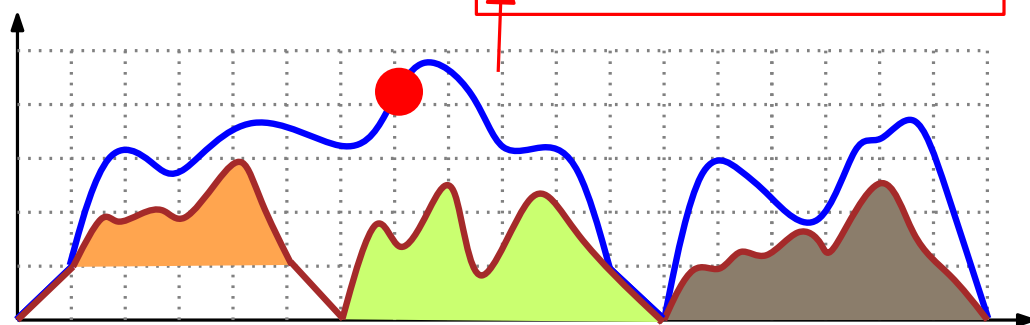
$x$ : nombre de **zéros** du chemin du bas

$s$ : hauteur du chemin du haut au point marqué.

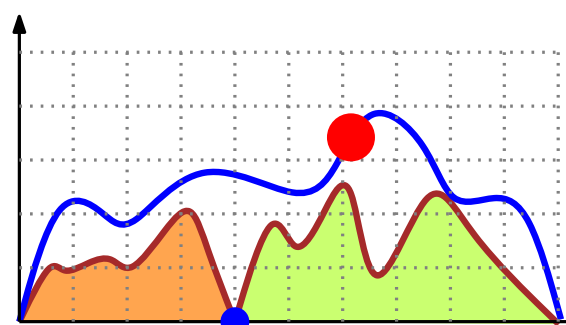
$$H(x) \equiv H(t, x, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} x^{\text{contact}(P)} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

On écrit trivialement une équation pour  $H$  en **pointant** la décomposition précédente:

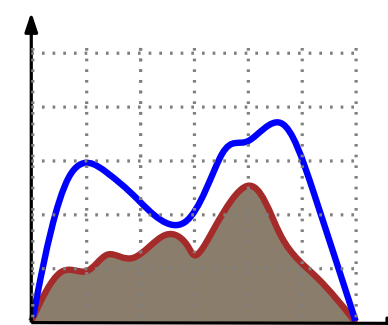
$$H(x) = F(x) + \boxed{sxt \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} F(x)} + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un **zéro du chemin bas pointé**



Intervalle de Tamari

Si l'on connaît  $\hat{F}(x)$  (et c'est le cas) ce n'est rien d'autre qu'une équation à une variable catalytique **linéaire (!)** pour  $H$ . Ça se résout illico avec la méthode du noyau!

# Méthode du noyau

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$$H(x) = F(x) + stF(x) \frac{H(x) - H(1)}{x - 1} + xt \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} H(x).$$

# Méthode du noyau

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$$H(x) = F(x) + sxtF(x)\frac{H(x) - H(1)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1}H(x).$$

On écrit: 
$$K(x)H(x) = F(x) - \frac{sxtF(x)H(1)}{(x - 1)}$$

$$K(x) = \left( -1 + sxt\frac{F(x)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \right).$$

# Méthode du noyau

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$$H(x) = F(x) + sxtF(x)\frac{H(x) - H(1)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1}H(x).$$

On écrit: 
$$K(x)H(x) = F(x) - \frac{sxtF(x)H(1)}{(x - 1)}$$

$$K(x) = \left( -1 + sxt\frac{F(x)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \right).$$

On cherche  $x = X(t, s)$  qui annule  $K(x)$ , on substitue et on trouve  $H(1)$ . Rappelons que  $F(x)$  est connue!

# Méthode du noyau

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$$H(x) = F(x) + sxtF(x)\frac{H(x) - H(1)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1}H(x).$$

On écrit: 
$$K(x)H(x) = F(x) - \frac{sxtF(x)H(1)}{(x - 1)}$$

$$K(x) = \left( -1 + sxt\frac{F(x)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \right).$$

On cherche  $x = X(t, s)$  qui annule  $K(x)$ , on substitue et on trouve  $H(1)$ . Rappelons que  $F(x)$  est connue!

• **Théorème [C'24].** La série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  est algébrique, avec une paramétrisation rationnelle explicite:

$$H(1) = \frac{(1 - 2z - Uz^2)^2(1 + U)}{(1 - z)^6}$$

$$t = z(1 - z)^3$$
$$s = \frac{U(1 - z)^3}{z(1 + U)^2(1 - Uz^2 - 2z)}.$$

# Méthode du noyau

$H(x; t, s)$  série des intervalles avec un point marqué

$$H(x) = F(x) + sxtF(x)\frac{H(x) - H(1)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1}H(x).$$

On écrit: 
$$K(x)H(x) = F(x) - \frac{sxtF(x)H(1)}{(x - 1)}$$

$$K(x) = \left( -1 + sxt\frac{F(x)}{x - 1} + xt\frac{F(x) - F(1)}{x - 1} \right).$$

On cherche  $x = X(t, s)$  qui annule  $K(x)$ , on substitue et on trouve  $H(1)$ . Rappelons que  $F(x)$  est connue!

• **Théorème [C'24].** La série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  est algébrique, avec une paramétrisation rationnelle explicite:

$$H(1) = \frac{(1 - 2z - Uz^2)^2(1 + U)}{(1 - z)^6} \quad \begin{aligned} t &= z(1 - z)^3 \\ s &= \frac{U(1 - z)^3}{z(1 + U)^2(1 - Uz^2 - 2z)}. \end{aligned}$$

→ Ce résultat contient **en principe** toute la distribution de la **variable aléatoire**  $Q_n(I)$ ... Mais comment en déduire l'asymptotique voulue !!?

$$H(1) \equiv H(1, t, s) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} \sum_{i=0}^{2n} s^{Q(i)}.$$

## Théorème de transfert et D-finitude...

- **Théorème de transfert [Flajolet-Odlyzko]**. Soit  $f(t)$  algébrique, avec une singularité dominante unique en  $\rho > 0$ . Si  $f(t) \sim c(1 - t/\rho)^\alpha$  quand  $t \rightarrow \rho$ , alors  $[t^n]f(t) \sim c\Gamma(-\alpha)n^{-\alpha-1}\rho^{-n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ).

# Théorème de transfert et D-finitude...

• **Théorème de transfert [Flajolet-Odlyzko]**. Soit  $f(t)$  algébrique, avec une singularité dominante unique en  $\rho > 0$ . Si  $f(t) \sim c(1 - t/\rho)^\alpha$  quand  $t \rightarrow \rho$ , alors  $[t^n]f(t) \sim c\Gamma(-\alpha)n^{-\alpha-1}\rho^{-n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ).

• **Application pour l'asymptotique des moments.**

Soit  $h_k = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k H(1)\Big|_{s=1}$ , alors  $\frac{[t^n]h_k}{[t^n]h_0} = \mathbf{E}[(Q_n(I))_k]$

$$(m)_k := m(m-1)\dots(m-k+1)$$

→ pour faire l'asymptotique des moments il suffit de connaître la singularité dominante de  $h_k$  pour tout  $k \geq 0$ .

→ à partir d'une équation algébrique pour  $H(1)$ , je peux faire ça automatiquement (en principe) pour n'importe quel  $k$  fini.



# Théorème de transfert et D-finitude...

• **Théorème de transfert [Flajolet-Odlyzko]**. Soit  $f(t)$  algébrique, avec une singularité dominante unique en  $\rho > 0$ . Si  $f(t) \sim c(1 - t/\rho)^\alpha$  quand  $t \rightarrow \rho$ , alors  $[t^n]f(t) \sim c\Gamma(-\alpha)n^{-\alpha-1}\rho^{-n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . ( $\alpha \notin \mathbb{N}$ ).

• **Application pour l'asymptotique des moments.**

Soit  $h_k = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k H(1) \Big|_{s=1}$ , alors  $\frac{[t^n]h_k}{[t^n]h_0} = \mathbf{E}[(Q_n(I))_k]$

$$(m)_k := m(m-1)\dots(m-k+1)$$

→ pour faire l'asymptotique des moments il suffit de connaître la singularité dominante de  $h_k$  pour tout  $k \geq 0$ .

→ à partir d'une équation algébrique pour  $H(1)$ , je peux faire ça automatiquement (en principe) pour n'importe quel  $k$  fini.

• **L'astuce qui tue – le truc que j'aime vraiment dans ce travail :)**

Toute série algébrique est D-finie (solution d'une ED linéaire à coeffs polynomiaux)

Notre série, vue en la variable  $s$ , et même  $(s-1)$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

## The D-finite trick...

Soit une série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  algébrique.

Soit  $h_k = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k H(1) \Big|_{s=1}$ .

Notre série, vue en la variable  $s - 1$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

$$h_k(t) = \sum_{d=1}^L \text{Rat}_d(t, k) h_{k-d}(t)$$

$\text{Rat}_d =$  fraction rationnelle explicite  
en  $k$  (algébrique en  $t$ )

## The D-finite trick...

Soit une série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  algébrique.

Soit  $h_k = \left(\frac{\partial}{\partial s}\right)^k H(1) \Big|_{s=1}$ .

Notre série, vue en la variable  $s - 1$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

$$h_k(t) = \sum_{d=1}^L \text{Rat}_d(t, k) h_{k-d}(t)$$

$\text{Rat}_d =$  fraction rationnelle explicite  
en  $k$  (algébrique en  $t$ )

Sous des hypothèses raisonnables, on peut déterminer la singularité dominante de  $h_k$   
facilement **par induction sur  $k$ !!!**

## The D-finite trick...

Soit une série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  algébrique.

$$\text{Soit } h_k = \left. \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k H(1) \right|_{s=1}.$$

Notre série, vue en la variable  $s - 1$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

$$h_k(t) = \sum_{d=1}^L \text{Rat}_d(t, k) h_{k-d}(t) \quad \text{Rat}_d = \text{fraction rationnelle explicite en } k \text{ (algébrique en } t)$$

Sous des hypothèses raisonnables, on peut déterminer la singularité dominante de  $h_k$  facilement **par induction sur  $k$ !!!**

Dans notre cas on montre par induction:

$$h_k(t) \sim c_k (1 - t/(27/256))^{1 - \frac{3}{4}k}$$

où  $c_k = \frac{\sqrt{6}(3k-4)(3k-8)}{96} c_{k-2}$ . La récurrence se résout directement et conduit au moment limite vu au premier transparent!  $\mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}$ .

## The D-finite trick...

Soit une série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  algébrique.

$$\text{Soit } h_k = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k H(1) \Big|_{s=1}.$$

Notre série, vue en la variable  $s - 1$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

$$h_k(t) = \sum_{d=1}^L \text{Rat}_d(t, k) h_{k-d}(t) \quad \text{Rat}_d = \text{fraction rationnelle explicite en } k \text{ (algébrique en } t)$$

Sous des hypothèses raisonnables, on peut déterminer la singularité dominante de  $h_k$  facilement **par induction sur  $k$ !!!**

Dans notre cas on montre par induction:

$$h_k(t) \sim c_k (1 - t/(27/256))^{1 - \frac{3}{4}k}$$

où  $c_k = \frac{\sqrt{6}(3k-4)(3k-8)}{96} c_{k-2}$ . La récurrence se résout directement et conduit au moment limite vu au premier transparent!  $\mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}$ .

Exo: montrer sans réfléchir et en quelques lignes de Maple que la hauteur d'un point au hasard sur un chemin de Dyck uniforme converge en échelle  $\sqrt{n}$  vers une loi de Rayleigh.

# The D-finite trick...

Soit une série  $H(1) \equiv H(1; t, s)$  algébrique.

$$\text{Soit } h_k = \left( \frac{\partial}{\partial s} \right)^k H(1) \Big|_{s=1}.$$

Notre série, vue en la variable  $s - 1$ , est algébrique sur  $\mathbb{Q}(t)$

Donc elle est D-finie: ses coefficients, les  $h_k$ , satisfont une récurrence polynomiale!

$$h_k(t) = \sum_{d=1}^L \text{Rat}_d(t, k) h_{k-d}(t)$$

$\text{Rat}_d =$  fraction rationnelle explicite en  $k$  (algébrique en  $t$ )

Sous des hypothèses raisonnables, on peut déterminer la singularité dominante de  $h_k$  facilement **par induction sur  $k$ !!!**

Dans notre cas on montre par induction:

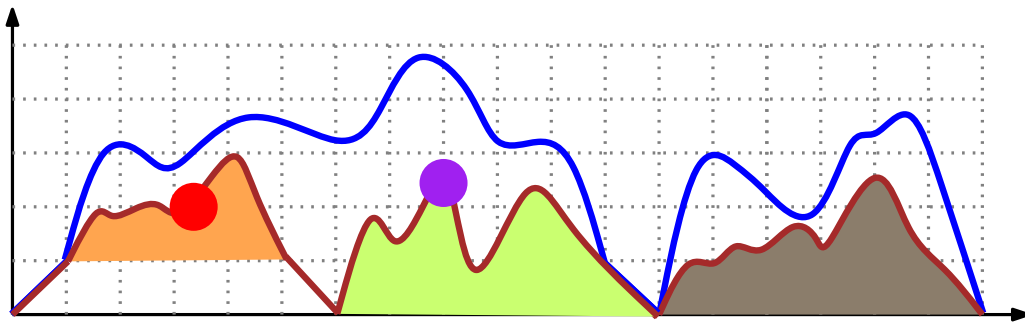
$$h_k(t) \sim c_k (1 - t/(27/256))^{1 - \frac{3}{4}k}$$

si ce n'est pas déjà connu, cette astuce est clairement le truc le plus intéressant dans mon article

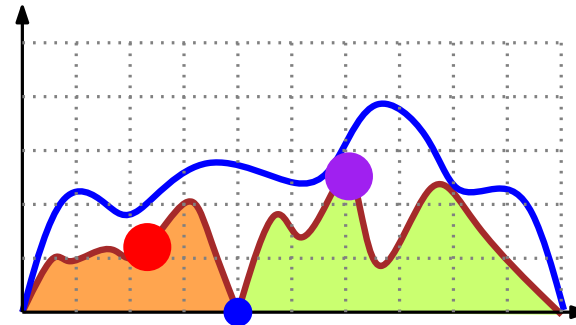
où  $c_k = \frac{\sqrt{6}(3k-4)(3k-8)}{96} c_{k-2}$ . La récurrence se résout directement et conduit au moment limite vu au premier transparent!  $\mathbf{E}[Z^k] = \frac{\sqrt{3} \cdot 2^{-\frac{k}{4}-1} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{3}) \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{2}{3})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{4}k + \frac{1}{2})}$ .

Exo: montrer sans réfléchir et en quelques lignes de Maple que la hauteur d'un point au hasard sur un chemin de Dyck uniforme converge en échelle  $\sqrt{n}$  vers une loi de Rayleigh.

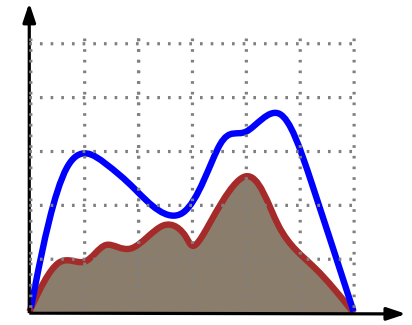
# Quelques mots sur le chemin du bas



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



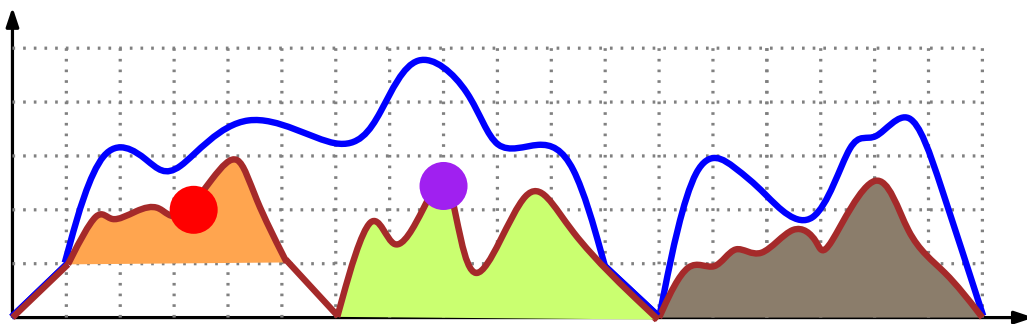
Intervalle de Tamari avec un  
**zéro du chemin bas pointé**



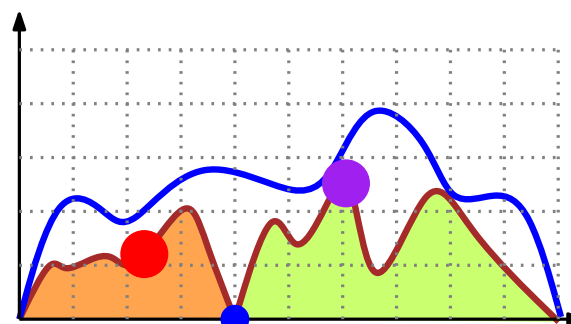
Intervalle de Tamari

- ● → pour le chemin du bas, on doit savoir si le point marqué arrive **avant ou après** le premier contact, sinon on ne peut pas suivre sa hauteur!

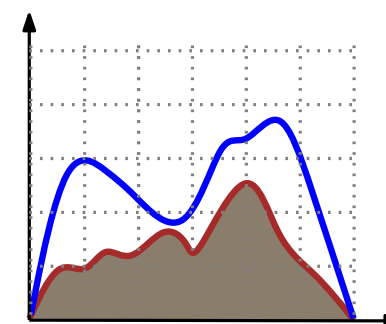
# Quelques mots sur le chemin du bas



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un  
**zéro du chemin bas pointé**



Intervalle de Tamari

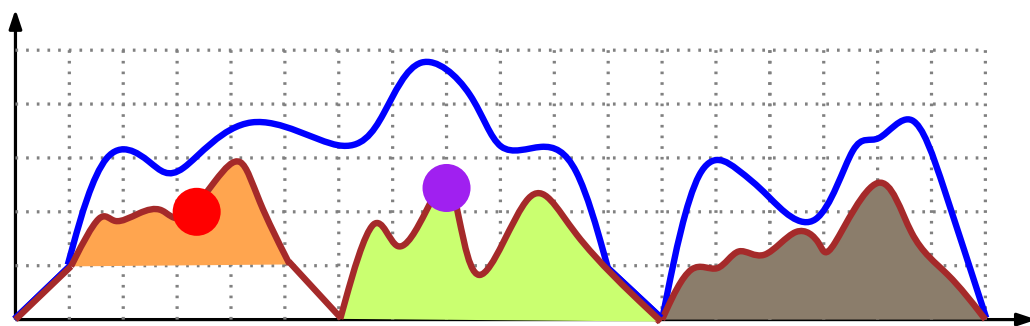
● ● → pour le chemin du bas, on doit savoir si le point marqué arrive **avant ou après** le premier contact, sinon on ne peut pas suivre sa hauteur!

→ on a besoin de **deux variables catalytiques (!!!)**

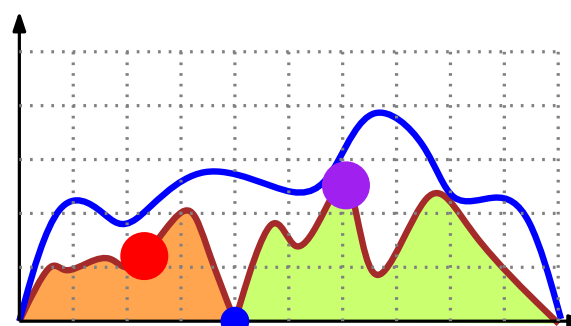
$$G(x, y) \equiv G(t, x, y, w) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} \sum_{i=0}^{2n} w^{P(i)} x^{\text{contact}_{<i}(P)} y^{\text{contact}_{\geq i}(P)}.$$



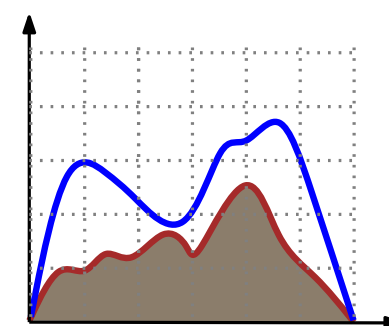
# Quelques mots sur le chemin du bas



Intervalle de Tamari de taille  $n + 1$



Intervalle de Tamari avec un **zéro du chemin bas pointé**

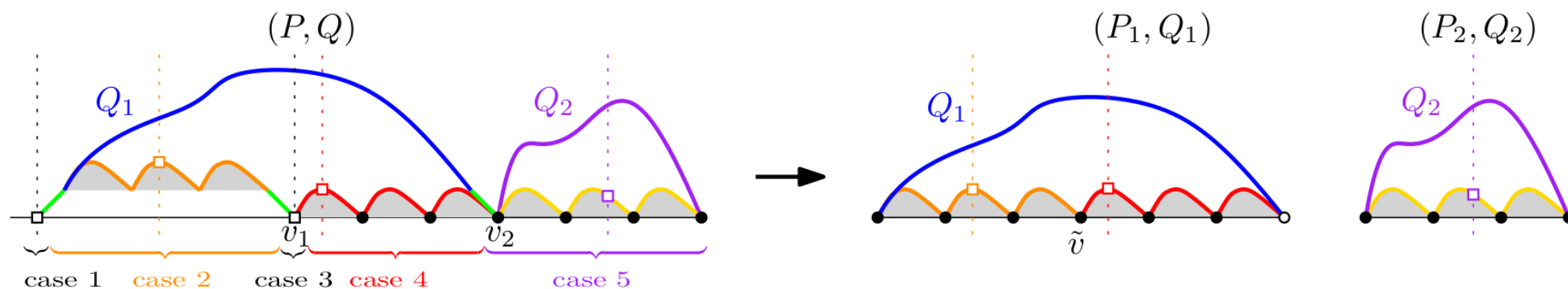


Intervalle de Tamari

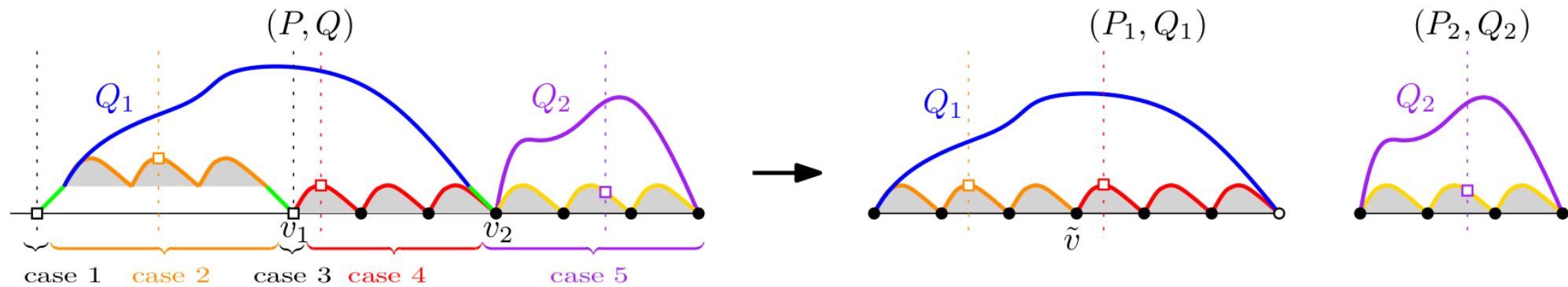
● ● → pour le chemin du bas, on doit savoir si le point marqué arrive **avant ou après** le premier contact, sinon on ne peut pas suivre sa hauteur!

→ on a besoin de **deux variables catalytiques (!!!)**

$$G(x, y) \equiv G(t, x, y, w) := \sum_{n \geq 0} t^n \sum_{(P, Q) \in \mathcal{I}_n} \sum_{i=0}^{2n} w^{P(i)} x^{\text{contact}_{<i}(P)} y^{\text{contact}_{\geq i}(P)}.$$



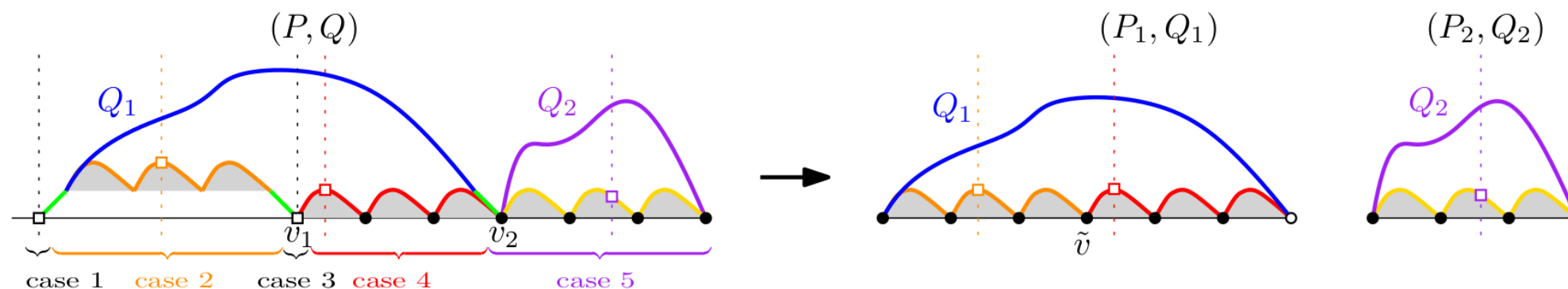
# Deux variables catalytiques... mais pour de faux



$$G(x, y) = F(y) + txw \frac{G(1, y) - G(1, 1)}{y - 1} F(y) + tx \frac{F(y) - yF(1)}{y - 1} F(y) \\ + t \frac{x^2}{y} \frac{G(x, y) - \frac{y}{x} F(x) - G(1, y) + yF(1)}{x - 1} F(y) + tx \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} G(x, y).$$

→ Fait intervenir  $G(x, y)$ ,  $G(1, y)$ ,  $G(1, 1)$ ... mais pas  $G(x, 1)$ .

## Deux variables catalytiques... mais pour de faux



$$G(x, y) = F(y) + txw \frac{G(1, y) - G(1, 1)}{y - 1} F(y) + tx \frac{F(y) - yF(1)}{y - 1} F(y) \\ + t \frac{x^2}{y} \frac{G(x, y) - \frac{y}{x} F(x) - G(1, y) + yF(1)}{x - 1} F(y) + tx \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} G(x, y).$$

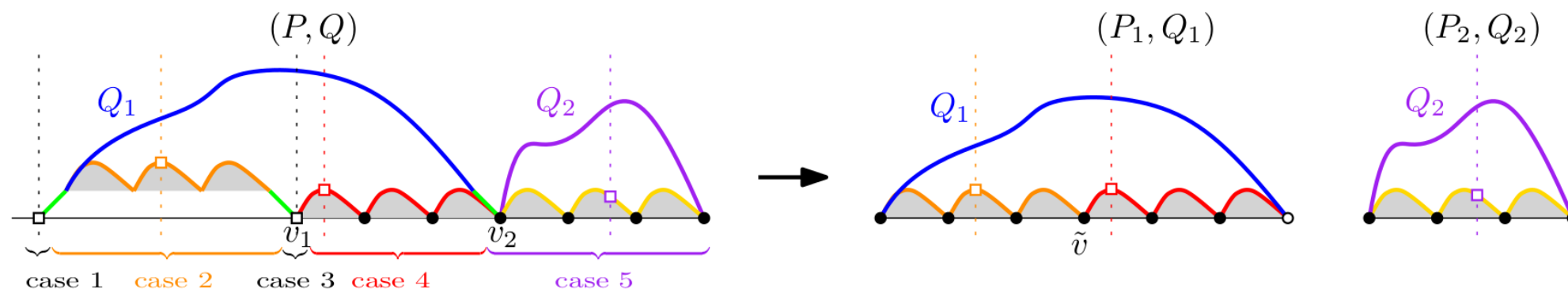
→ Fait intervenir  $G(x, y)$ ,  $G(1, y)$ ,  $G(1, 1)$ ... mais pas  $G(x, 1)$ .

→ du coup ce n'est pas si dur à résoudre!

... on voit l'équation comme une équation catalytique en  $x$  où  $y$  est un paramètre...

... une fois résolue (méthode du noyau ici), on n'a plus qu'une équation à une variable catalytique ( $y$ ). Et voilà!

## Deux variables catalytiques... mais pour de faux



$$G(x, y) = F(y) + txw \frac{G(1, y) - G(1, 1)}{y - 1} F(y) + tx \frac{F(y) - yF(1)}{y - 1} F(y) \\ + t \frac{x^2}{y} \frac{G(x, y) - \frac{y}{x} F(x) - G(1, y) + yF(1)}{x - 1} F(y) + tx \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} G(x, y).$$

→ Fait intervenir  $G(x, y)$ ,  $G(1, y)$ ,  $G(1, 1)$ ... mais pas  $G(x, 1)$ .

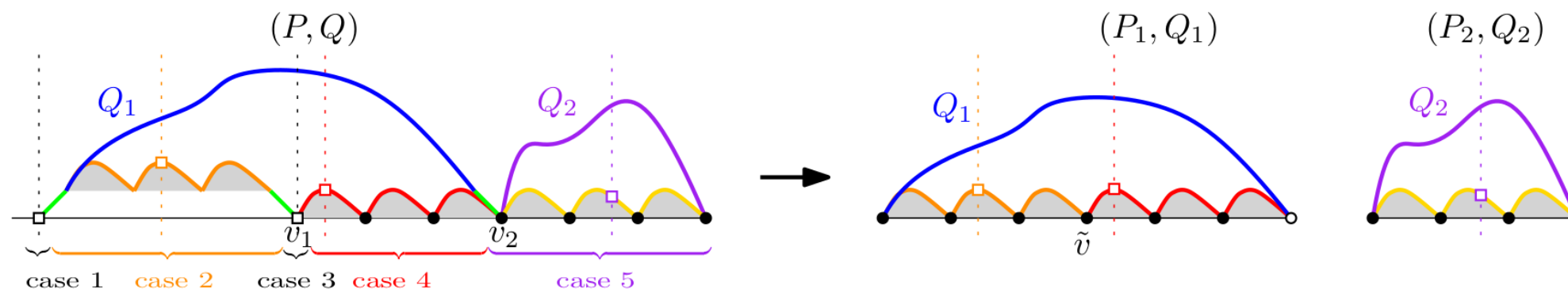
→ du coup ce n'est pas si dur à résoudre!

... on voit l'équation comme une équation catalytique en  $x$  où  $y$  est un paramètre...

... une fois résolue (méthode du noyau ici), on n'a plus qu'une équation à une variable catalytique ( $y$ ). Et voilà!

→ Cette méthode d'élimination successive est utilisée indépendamment (et beaucoup plus généralement!) par Bousquet-Mélou et Notarantonio.

## Deux variables catalytiques... mais pour de faux



$$G(x, y) = F(y) + txw \frac{G(1, y) - G(1, 1)}{y - 1} F(y) + tx \frac{F(y) - yF(1)}{y - 1} F(y) \\ + t \frac{x^2}{y} \frac{G(x, y) - \frac{y}{x} F(x) - G(1, y) + yF(1)}{x - 1} F(y) + tx \frac{F(x) - F(1)}{x - 1} G(x, y).$$

→ Fait intervenir  $G(x, y)$ ,  $G(1, y)$ ,  $G(1, 1)$ ... mais pas  $G(x, 1)$ .

→ du coup ce n'est pas si dur à résoudre!

... on voit l'équation comme une équation catalytique en  $x$  où  $y$  est un paramètre...

... une fois résolue (méthode du noyau ici), on n'a plus qu'une équation à une variable catalytique ( $y$ ). Et voilà!

→ Cette méthode d'élimination successive est utilisée indépendamment (et beaucoup plus généralement!) par Bousquet-Mélou et Notarantonio.

→ Pour l'asymptotique, la "D-finite trick" marche à nouveau!

## Conclusion

- Si j'ai bien compris, Bertoin-Curien-Riera (livre à venir) savent faire la limite d'échelle complète des chemins. Je ne sais pas s'ils savent obtenir la loi limite explicite pour un point.

# Conclusion

- Si j'ai bien compris, Bertoin-Curien-Riera (livre à venir) savent faire la limite d'échelle complète des chemins. Je ne sais pas s'ils savent obtenir la loi limite explicite pour un point.
- Cette loi limite est-elle universelle pour les équations de Bousquet-Mélou Jehanne positives? (l'approche probabiliste résout probablement aussi cette question!)

# Conclusion

- Si j'ai bien compris, Bertoin-Curien-Riera (livre à venir) savent faire la limite d'échelle complète des chemins. Je ne sais pas s'ils savent obtenir la loi limite explicite pour un point.
- Cette loi limite est-elle universelle pour les équations de Bousquet-Mélou Jehanne positives? (l'approche probabiliste résout probablement aussi cette question!)
- J'aimerais avoir d'autres applications de mon "asymptotic D-finite trick"!



MERCI!