



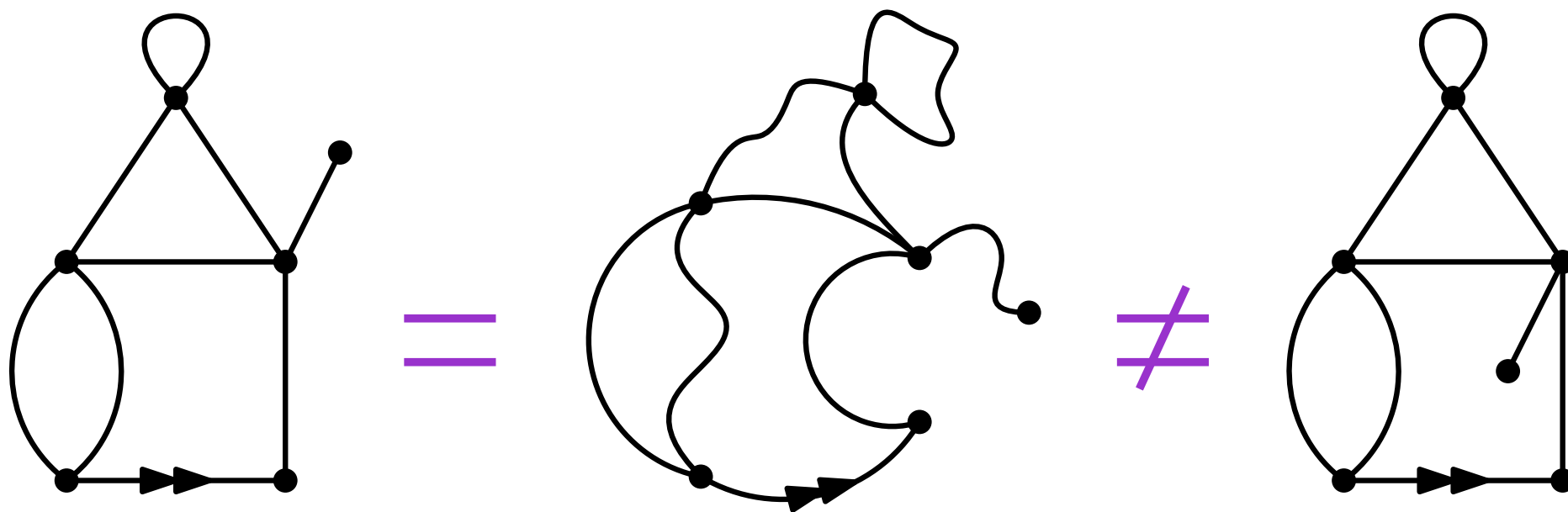
# Bijections “fermeture éclair” pour les cartes biparties planaires à degrés prescrits

Juliette Schabanel (ENS Paris)

Stage de M2 encadré par Baptiste Louf (IMB)

# Cartes planaires

Une **carte planaire** est un plongement propre d'un graphe planaire connexe dans la sphère, vu à homéomorphisme préservant l'orientation près. Arêtes multiples et boucles sont autorisées.



Carte planaire = graphe planaire + ordre cyclique sur les arêtes autour de chaque sommet

Pour casser les symétries, les cartes sont **enracinées** (une arête orientée marquée).

# Contexte

**Théorème.** [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $2 \cdot 3^n \frac{\text{Cat}(n)}{n+2}$  où  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$   $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan.

# Contexte

**Théorème.** [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $2 \cdot 3^n \frac{\text{Cat}(n)}{n+2}$  où  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$   $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan.

Nombre d'arbres planaires à  $n$  arêtes.

# Contexte

**Théorème.** [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $2 \cdot 3^n \frac{\text{Cat}(n)}{n+2}$  où  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$   $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan.

Nombre d'arbres planaires à  $n$  arêtes.

⇒ Bijection de **Cori-Vauquelin** (1981), reformulée par **Schaeffer** (1998).

# Contexte

**Théorème.** [Tutte, 63] Le nombre de cartes planaires à  $n$  arêtes est  $2 \cdot 3^n \frac{\text{Cat}(n)}{n+2}$  où  $\text{Cat}(n) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$   $n^{\text{ième}}$  nombre de Catalan.

Nombre d'arbres planaires à  $n$  arêtes.

⇒ Bijection de **Cori-Vauquelin** (1981), reformulée par **Schaeffer** (1998).

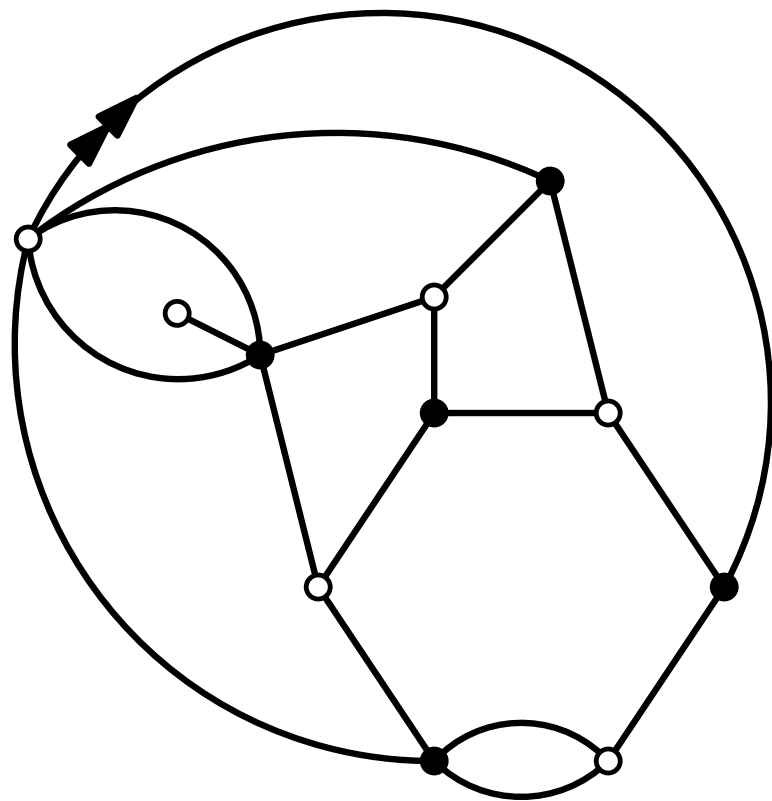
**Théorème.** [Goulden-Jackson, 08] Soit  $T_g(n)$  le nombre de triangulations de genre  $g$  à  $2n$  faces.

$$(n+1)T_g(n) = 4n(3n-2)(3n-4)T_{g-1}(n-2) + 4(3n-1)T_g(n-1) + 4 \sum_{i+j=n-2} \sum_{g_1+g_2=g} (3i+2)(3j+2)T_{g_1}(i)T_{g_2}(j)$$

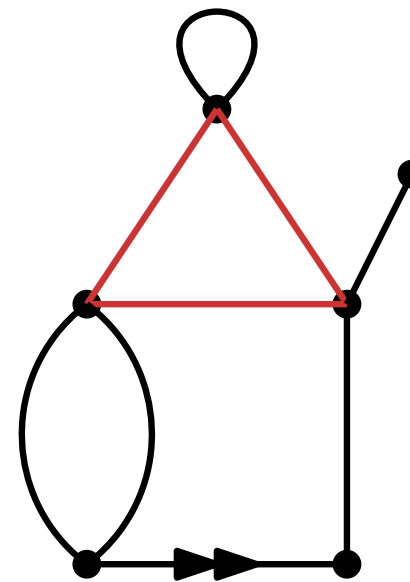
- ▶ Cas à un sommet [Chapuy-Féray-Fusy, 13]
- ▶ Cas planaire [Louf, 19]

# Cartes biparties

Une carte est **bipartie** si l'on peut colorier proprement ses sommets en noir et blanc  $\iff$  toutes les faces ont degré pair.



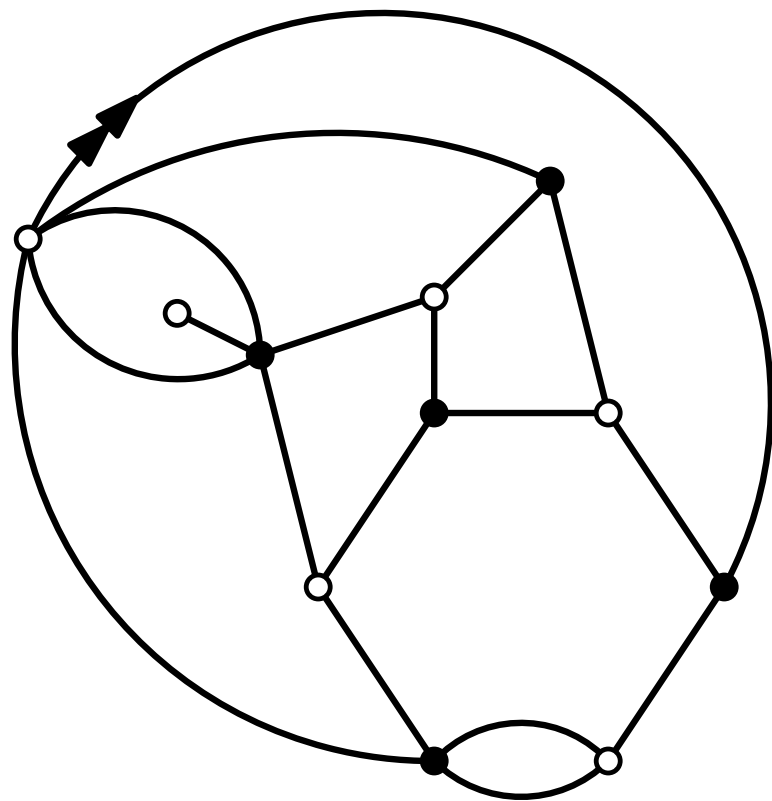
Bipartie



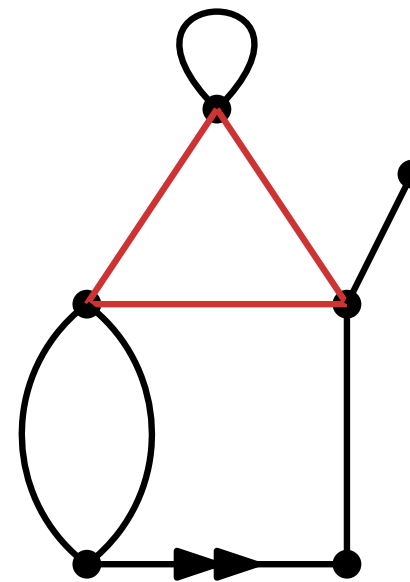
Non bipartie

# Cartes biparties

Une carte est **bipartie** si l'on peut colorier proprement ses sommets en noir et blanc  $\iff$  toutes les faces ont degré pair.



Bipartie



Non bipartie

Coloriage canonique : racine de blanc vers noir  $\circ \rightarrow \bullet$



# Cartes biparties à degrés prescrits

Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$  une suite d'entiers. Une carte bipartie  $M$  a **profil**  $\mathbf{d}$  si elle a exactement  $d_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i$ .

On note  $B(\mathbf{d})$  leur nombre.

# Cartes biparties à degrés prescrits

Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$  une suite d'entiers. Une carte bipartie  $M$  a **profil**  $\mathbf{d}$  si elle a exactement  $d_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i$ .

On note  $B(\mathbf{d})$  leur nombre.

**Formule d'Euler :**  $v + f = n + 2$  pour toute carte plane.

Une carte  $M \in B(\mathbf{d})$  a :

- $f(\mathbf{d}) = \sum_{i \geq 1} d_i$  faces
- $n(\mathbf{d}) = \sum_{i \geq 1} i d_i$  arêtes
- $v(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}) + 2 - f(\mathbf{d})$  sommets

# Cartes biparties à degrés prescrits

Soit  $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \dots)$  une suite d'entiers. Une carte bipartie  $M$  a **profil**  $\mathbf{d}$  si elle a exactement  $d_i$  faces de degré  $2i$  pour tout  $i$ .

On note  $B(\mathbf{d})$  leur nombre.

**Formule d'Euler :**  $v + f = n + 2$  pour toute carte plane.

Une carte  $M \in B(\mathbf{d})$  a :

- $f(\mathbf{d}) = \sum_{i \geq 1} d_i$  faces
- $n(\mathbf{d}) = \sum_{i \geq 1} i d_i$  arêtes
- $v(\mathbf{d}) = n(\mathbf{d}) + 2 - f(\mathbf{d})$  sommets

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

$\swarrow$   
 $s_i + t_i = d_i \forall i$

# Formules

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

**Formule d'Euler :**  $n + 1 = v + f - 1$  pour toute carte plane.

$$\left( (f(\mathbf{d}) - 1)v(\mathbf{d}) + \binom{f(\mathbf{d}) - 1}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (v(\mathbf{s}) + f(\mathbf{s}) - 1) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

# Formules

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

**Formule d'Euler :**  $n + 1 = v + f - 1$  pour toute carte plane.

**Théorème.** Le nombre de cartes planes biparties de profil  $\mathbf{d}$  satisfait :

$$2v(\mathbf{d})(f(\mathbf{d}) - 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d}) - 1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

# Formules

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

**Formule d'Euler :**  $n + 1 = v + f - 1$  pour toute carte plane.

**Théorème.** Le nombre de cartes planes biparties de profil  $\mathbf{d}$  satisfait :

$$\frac{2v(\mathbf{d})(f(\mathbf{d}) - 1)}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1) B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d}) - 1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

# Formules

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

**Formule d'Euler :**  $n + 1 = v + f - 1$  pour toute carte plane.

**Théorème.** Le nombre de cartes planes biparties de profil  $\mathbf{d}$  satisfait :

$$4(f(\mathbf{d}) - 1) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} v(\mathbf{s}) v(\mathbf{t}) B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t})$$

et

$$\binom{f(\mathbf{d}) - 1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t})$$

# Formules

**Théorème.** [Louf 21]

$$\left( \binom{n(\mathbf{d}) + 1}{2} - \binom{v(\mathbf{d})}{2} \right) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (1 + n(\mathbf{s})) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t}).$$

**Formule d'Euler :**  $n + 1 = v + f - 1$  pour toute carte plane.

**Théorème.** Le nombre de cartes planes biparties de profil  $\mathbf{d}$  satisfait :

$$4(f(\mathbf{d}) - 1) B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} v(\mathbf{s}) v(\mathbf{t}) B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t})$$

Bijection de  
cet exposé

et

$$\binom{f(\mathbf{d}) - 1}{2} B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1) \binom{v(\mathbf{t})}{2} B(\mathbf{s}) B(\mathbf{t})$$



# Cas à 2 faces

Cas à deux faces de la formule non simplifiée [Bouttier-Guitter-Miermont, 22].

$$4(\cancel{f(\mathbf{d})} - 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

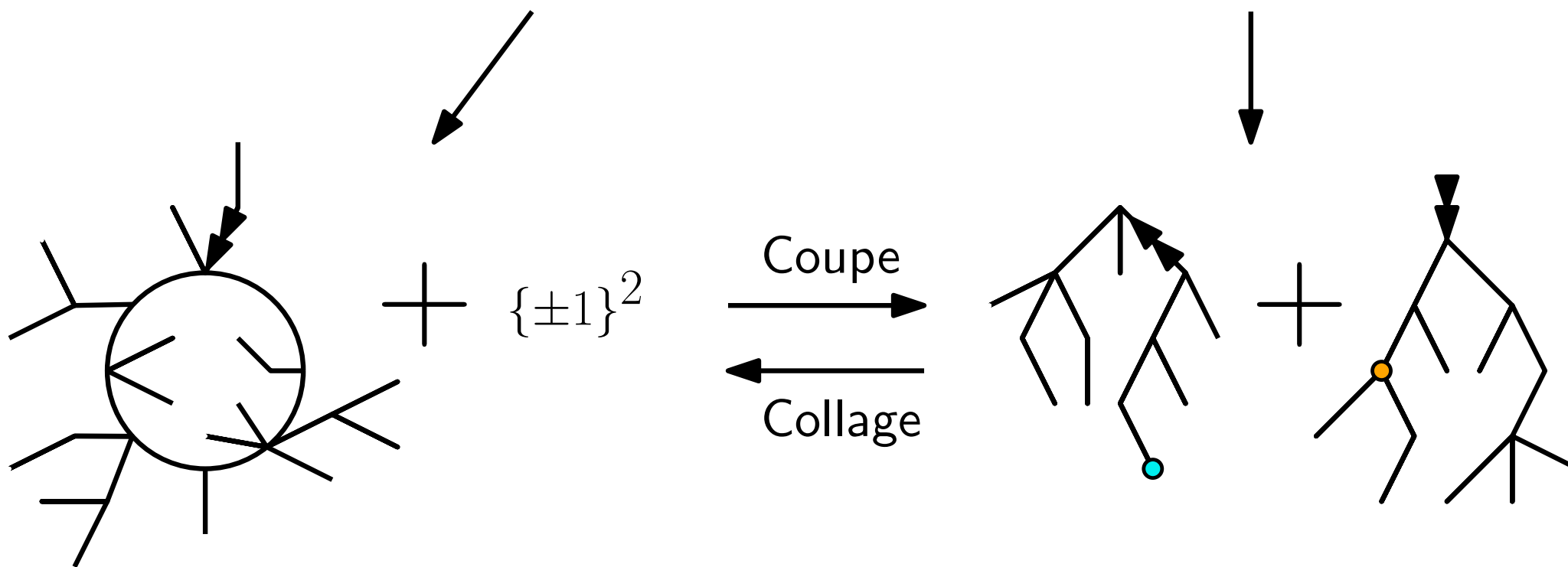
$\mathbf{d} = \mathbb{1}_{i=m_1} + \mathbb{1}_{i=m_2}$        $\mathbf{s} = \mathbb{1}_{i=m_1}$        $\mathbf{t} = \mathbb{1}_{i=m_2}$

# Cas à 2 faces

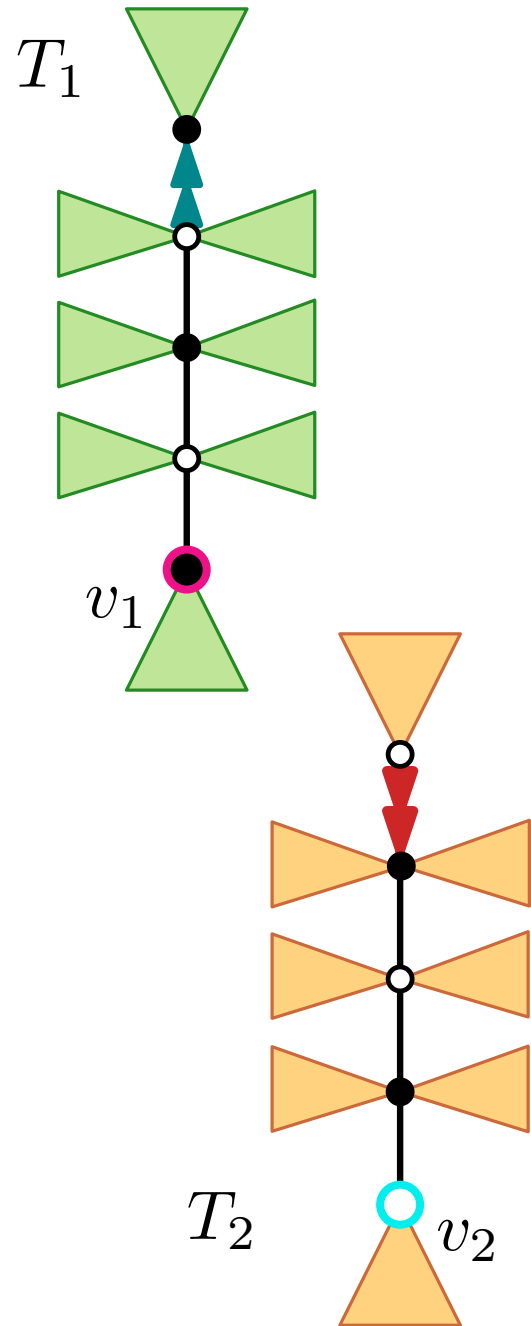
Cas à deux faces de la formule non simplifiée [Bouttier-Guitter-Miermont, 22].

$$4(\cancel{f(\mathbf{d})} - 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

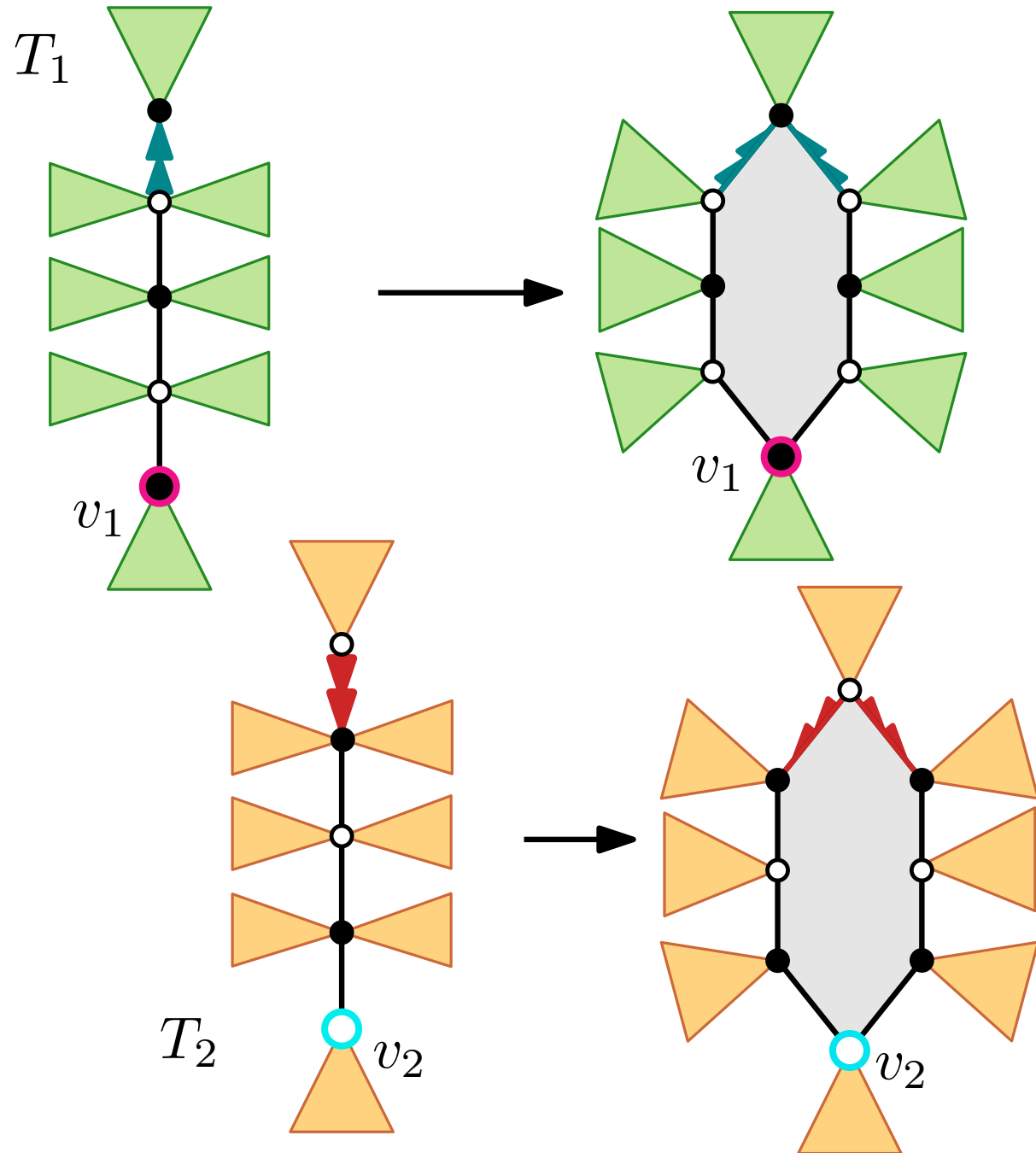
$\mathbf{d} = \mathbb{1}_{i=m_1} + \mathbb{1}_{i=m_2}$ 
 $\mathbf{s} = \mathbb{1}_{i=m_1}$ 
 $\mathbf{t} = \mathbb{1}_{i=m_2}$



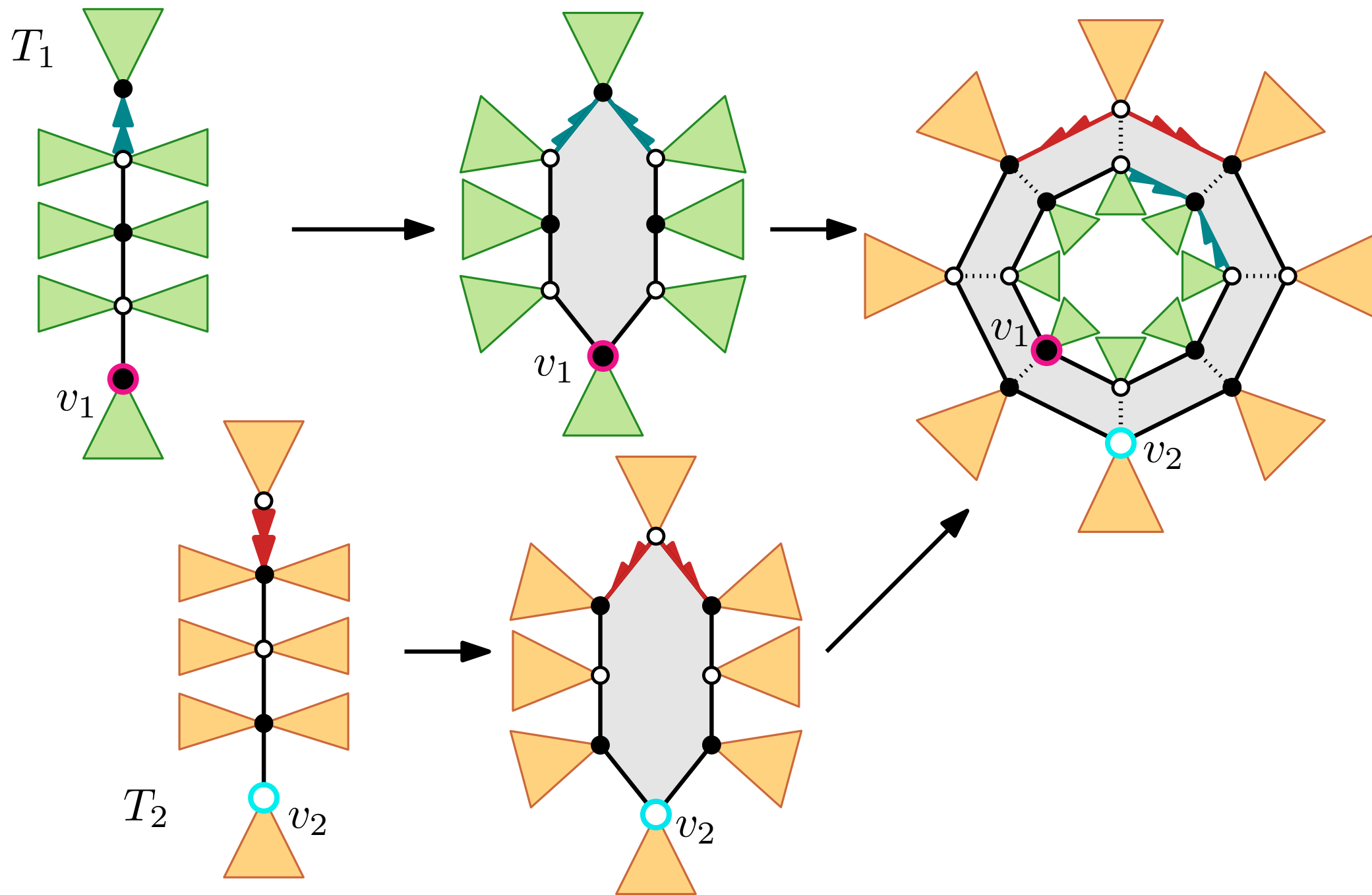
# Cas à 2 faces : collage



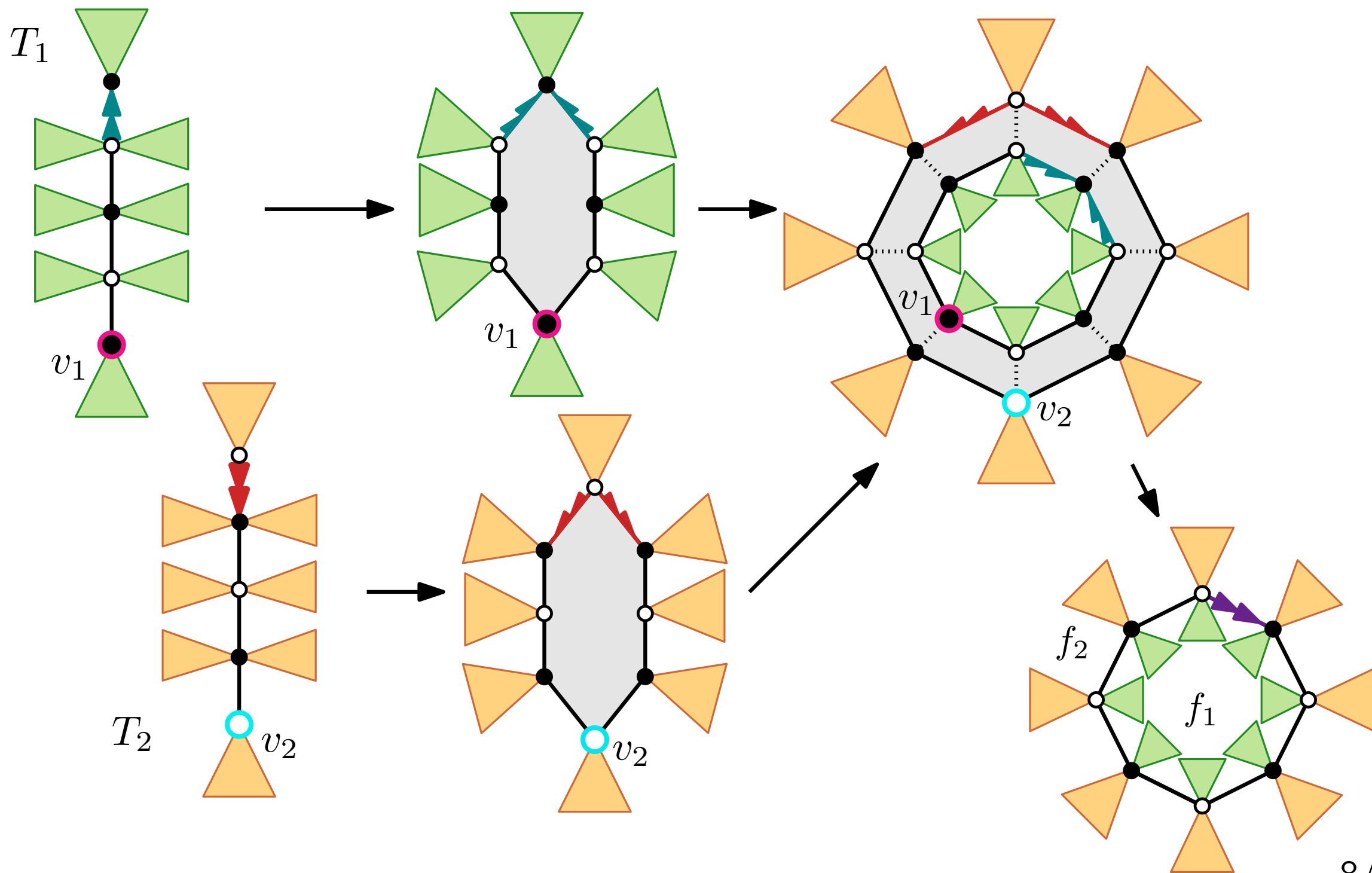
# Cas à 2 faces : collage



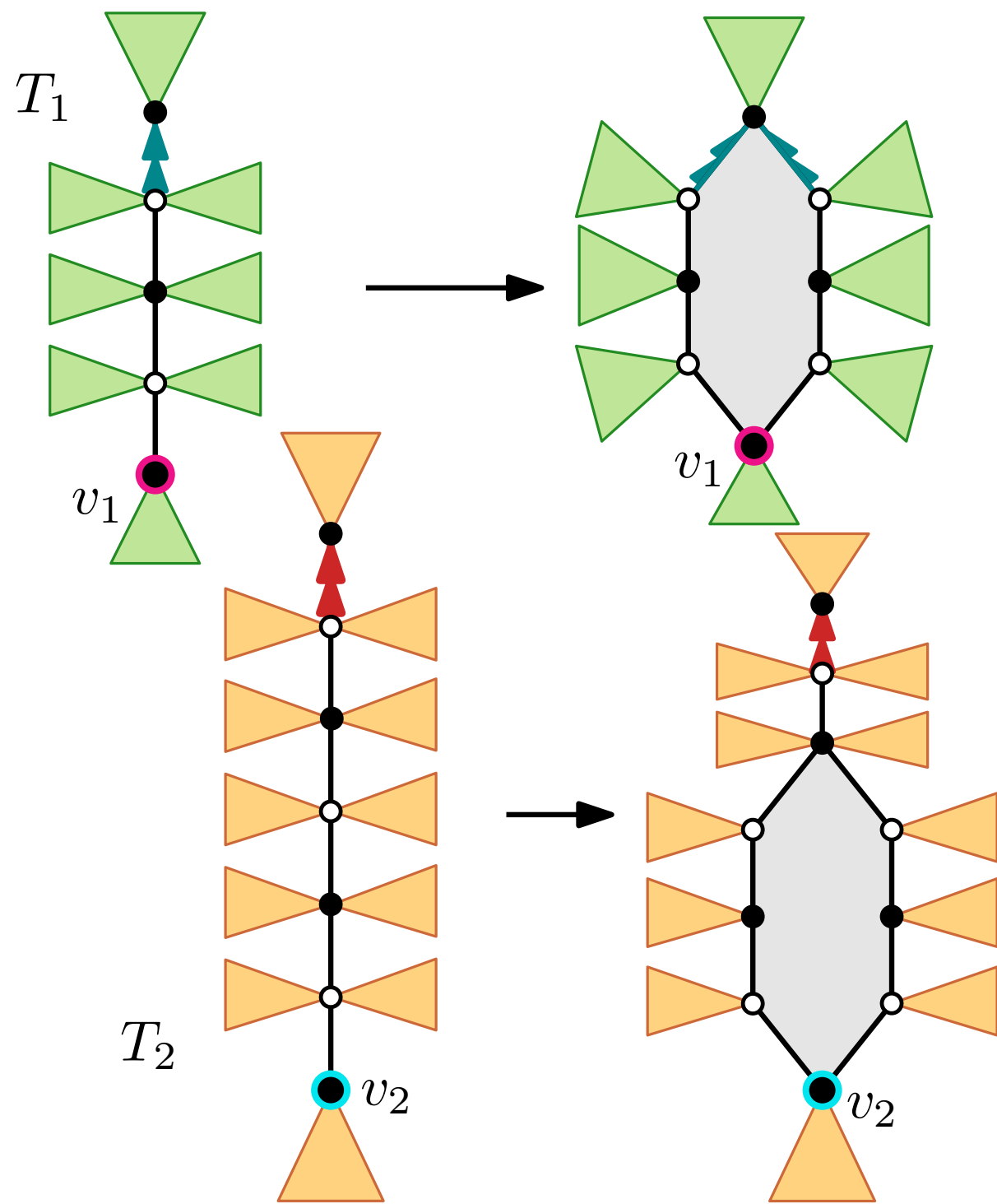
# Cas à 2 faces : collage



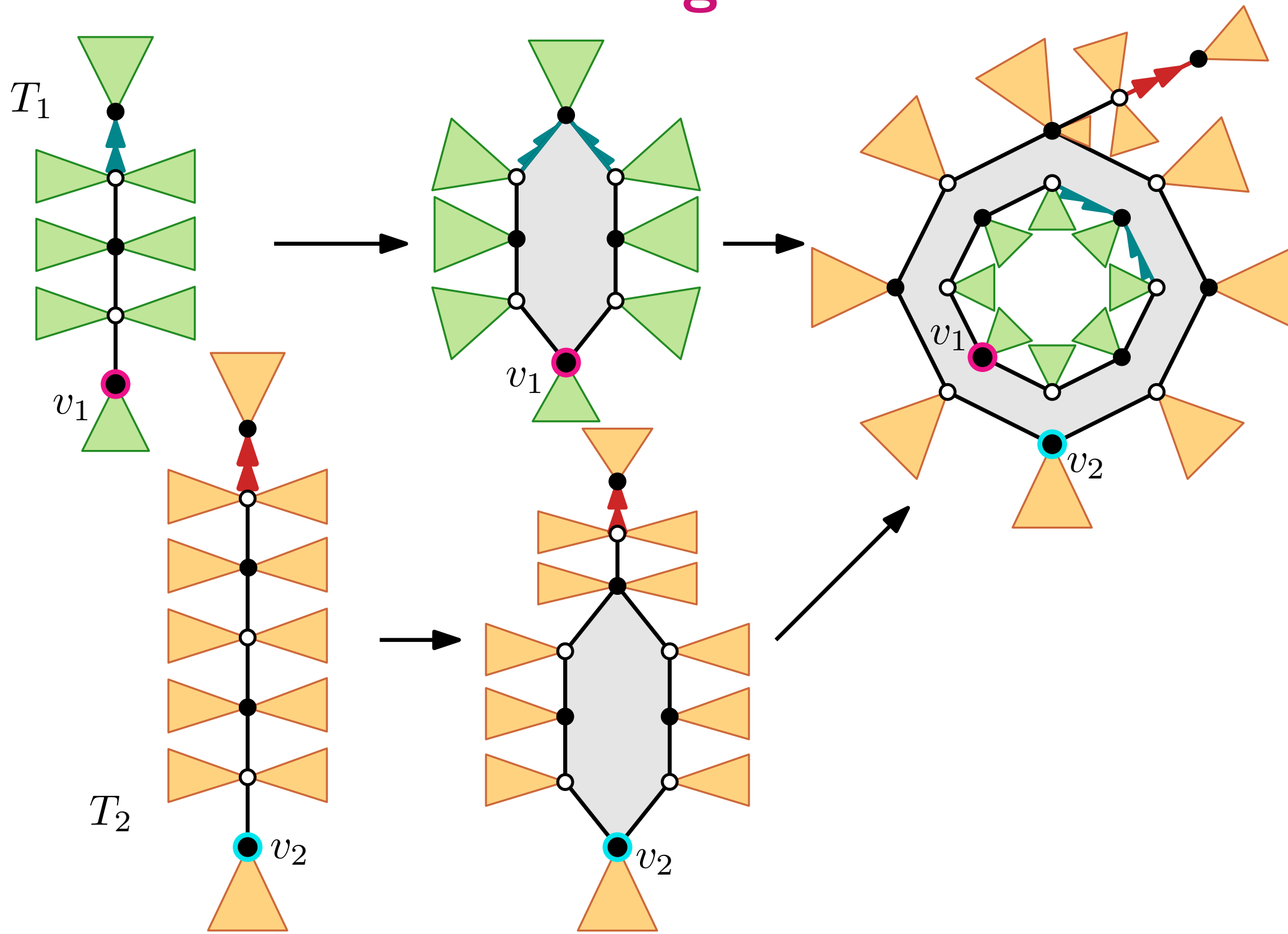
# Cas à 2 faces : collage



# Cas à 2 faces : collage

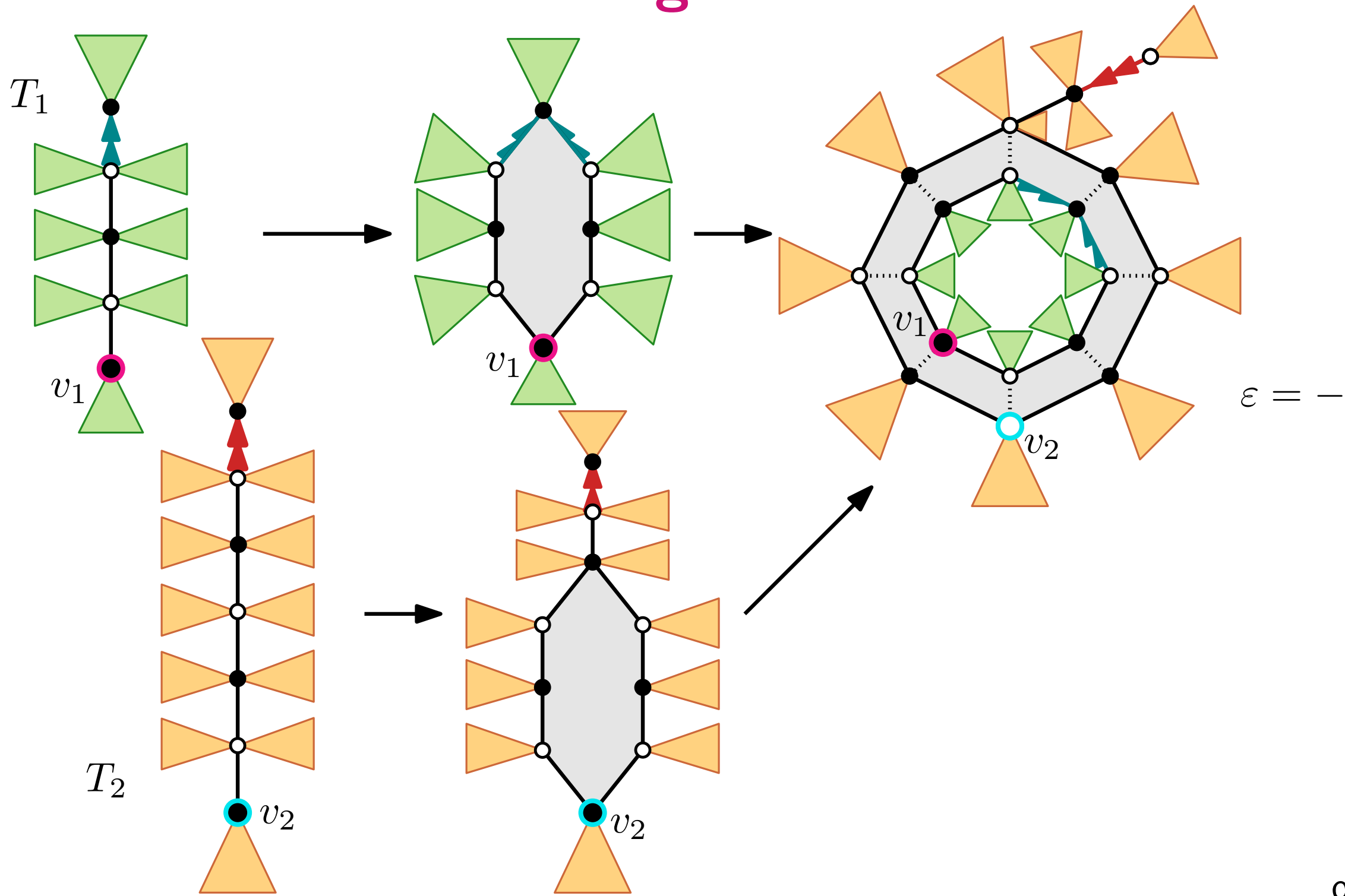


# Cas à 2 faces : collage

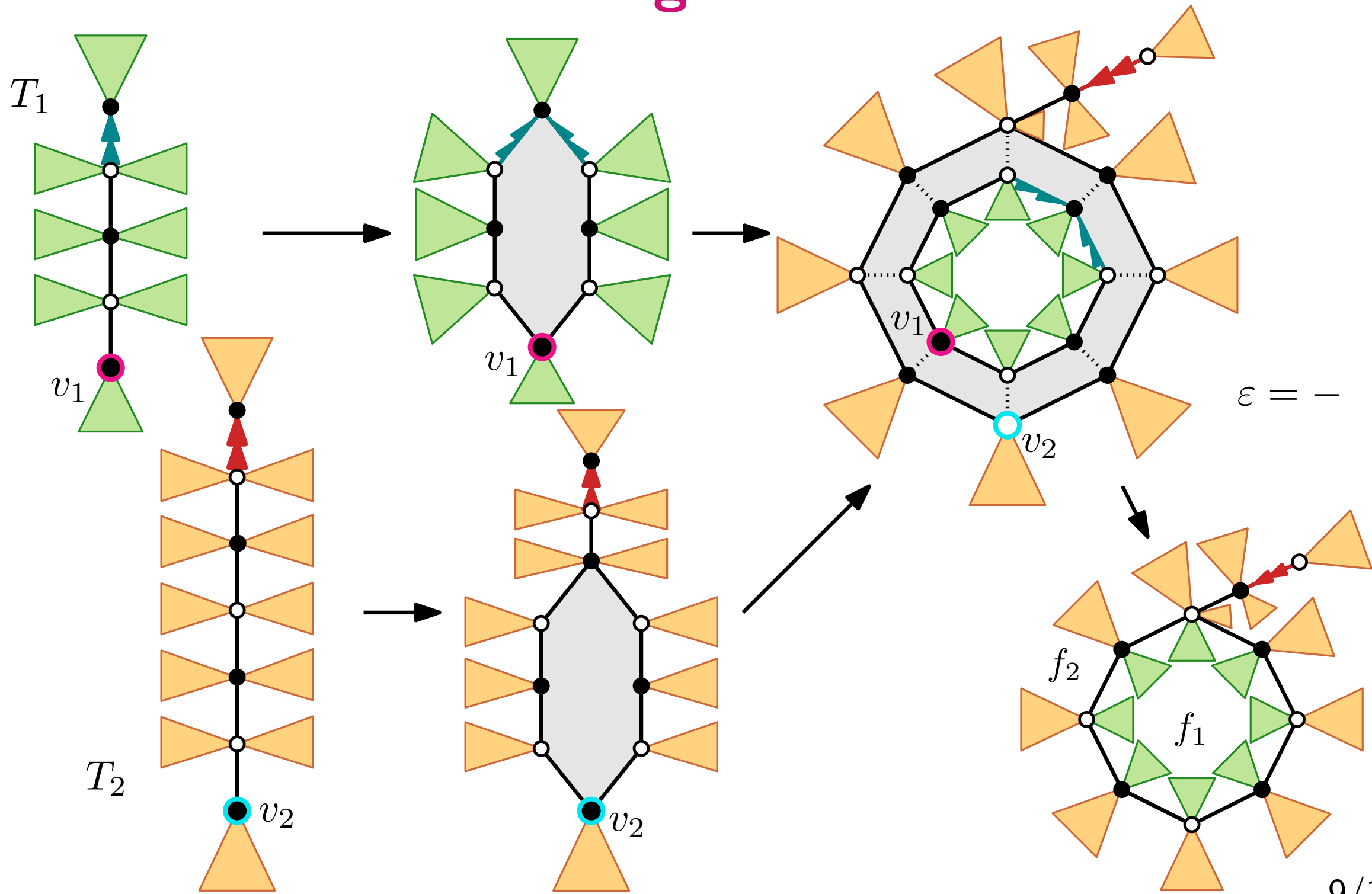




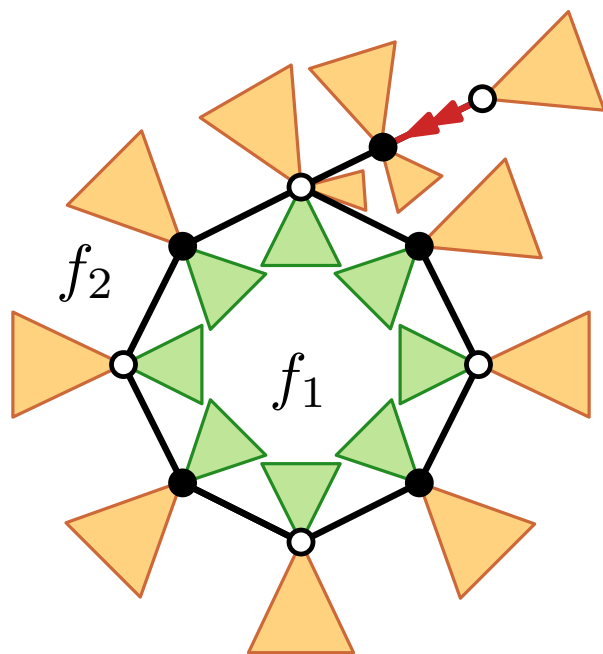
# Cas à 2 faces : collage



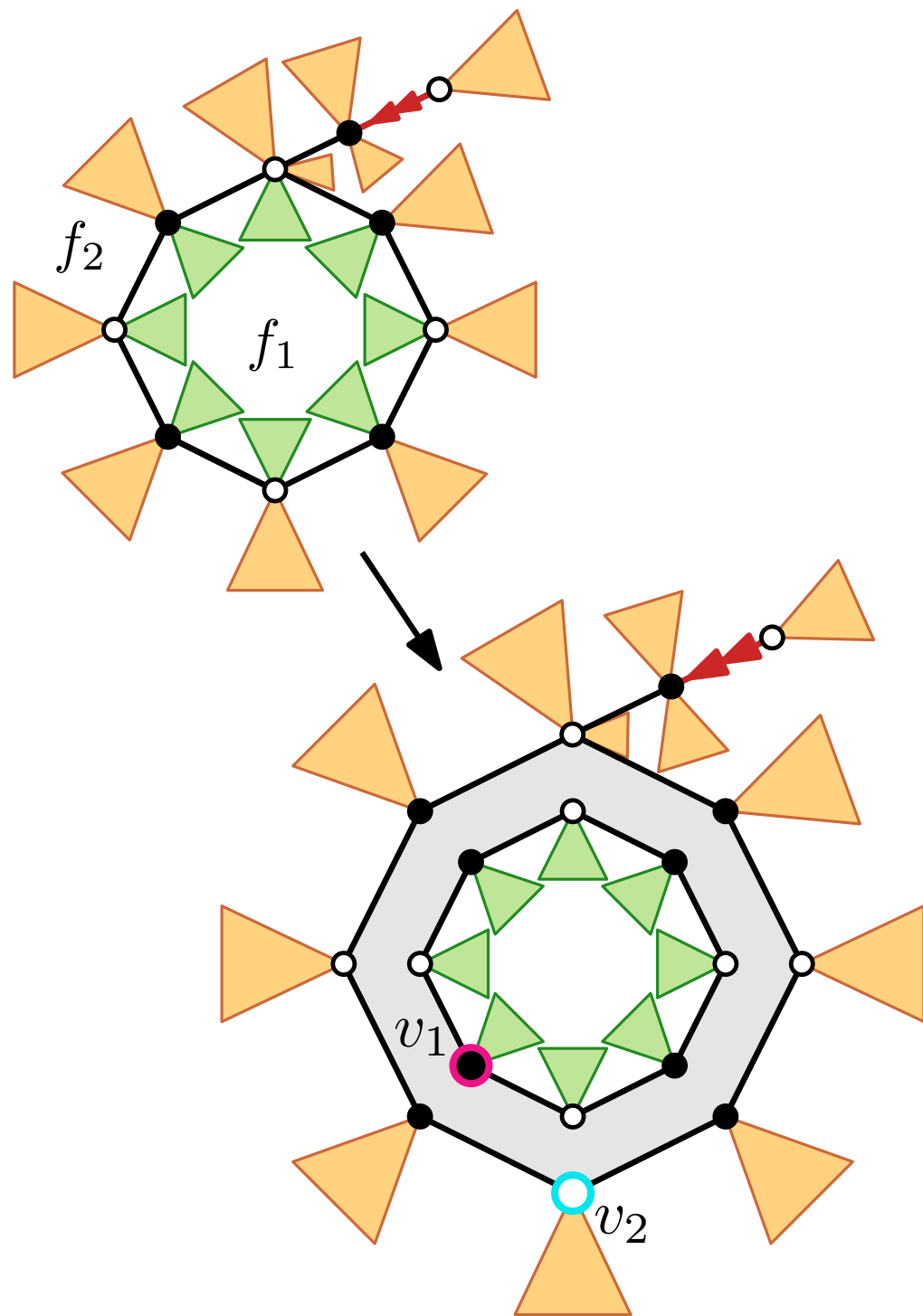
# Cas à 2 faces : collage



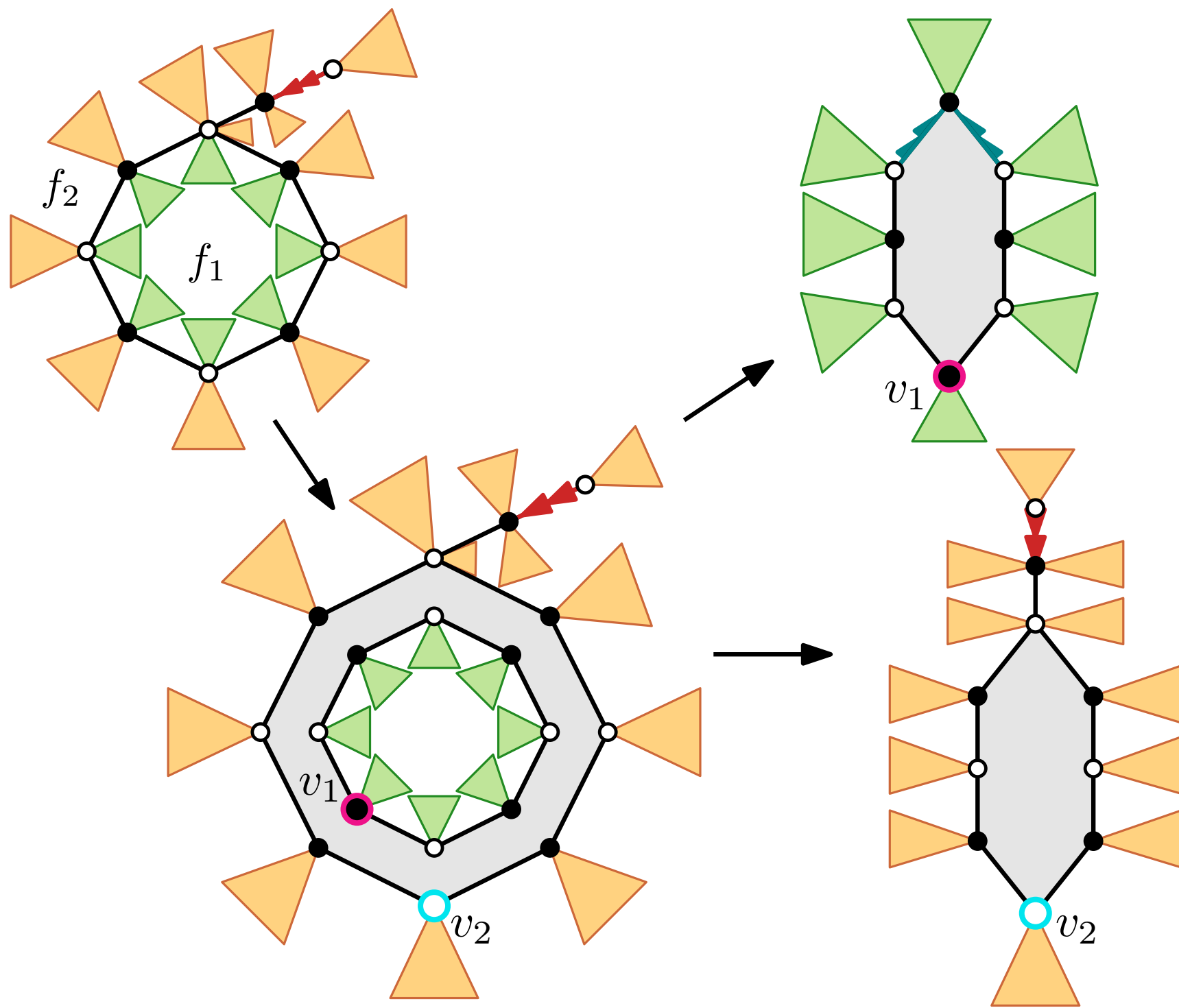
# Cas à 2 faces : coupe



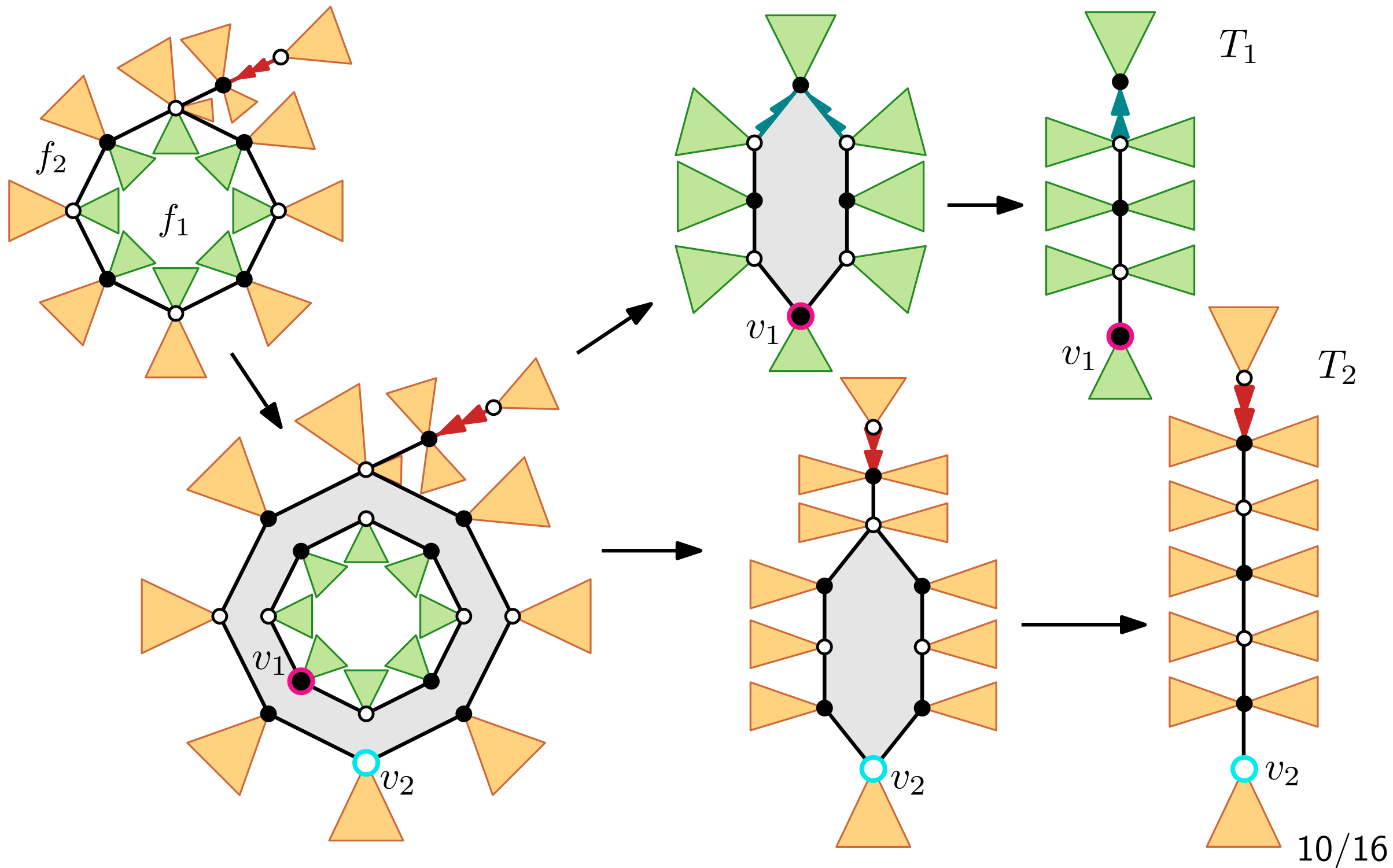
# Cas à 2 faces : coupe



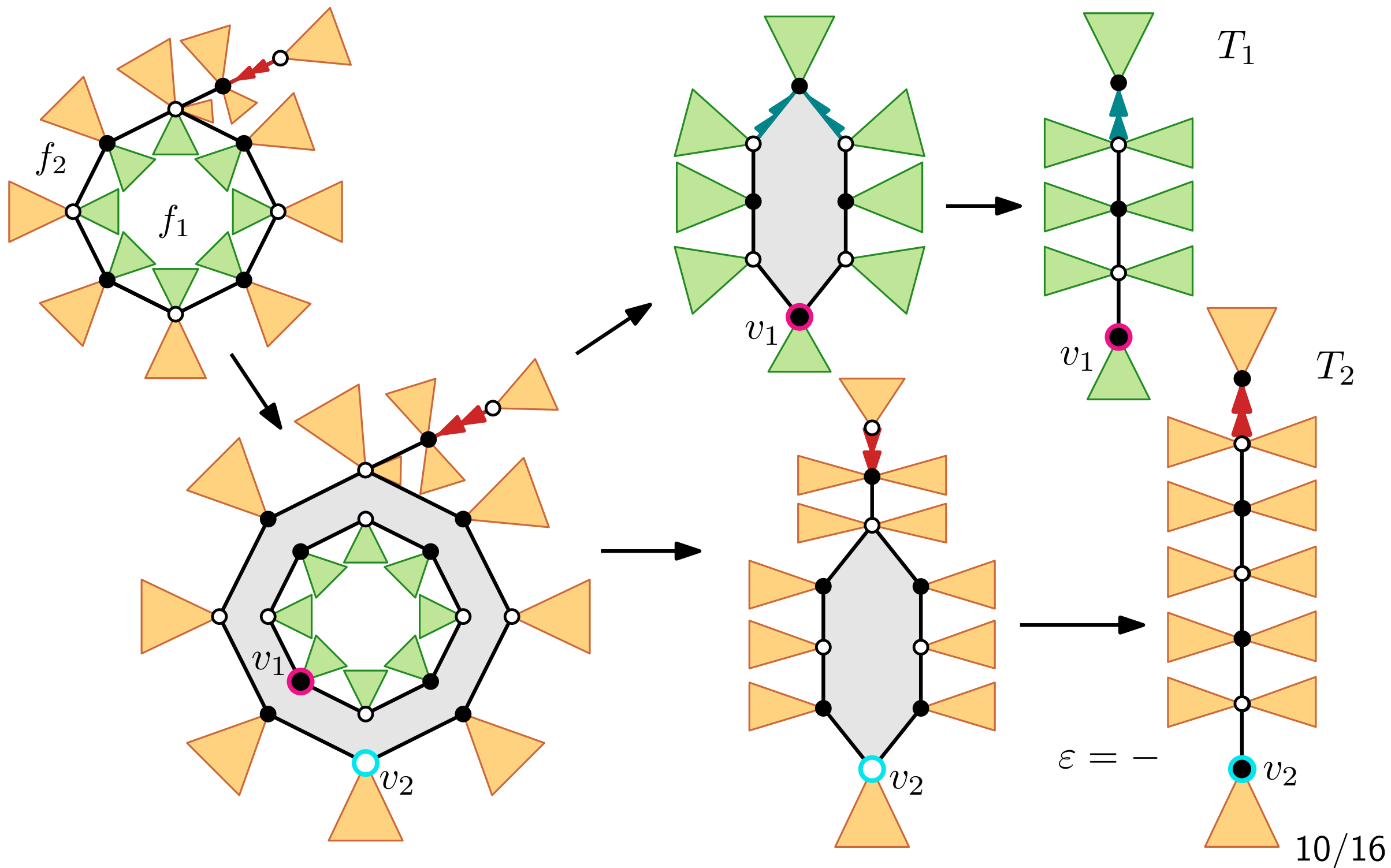
# Cas à 2 faces : coupe



# Cas à 2 faces : coupe



# Cas à 2 faces : coupe



# Cas général

$$4(f(\mathbf{d}) - 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

## Problèmes :

- Collage : choix des chemins d'ouverture ?
- Coupe : choix du cycle de coupe ?



# Cas général

$$4(f(\mathbf{d}) - 1)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} v(\mathbf{s})v(\mathbf{t})B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

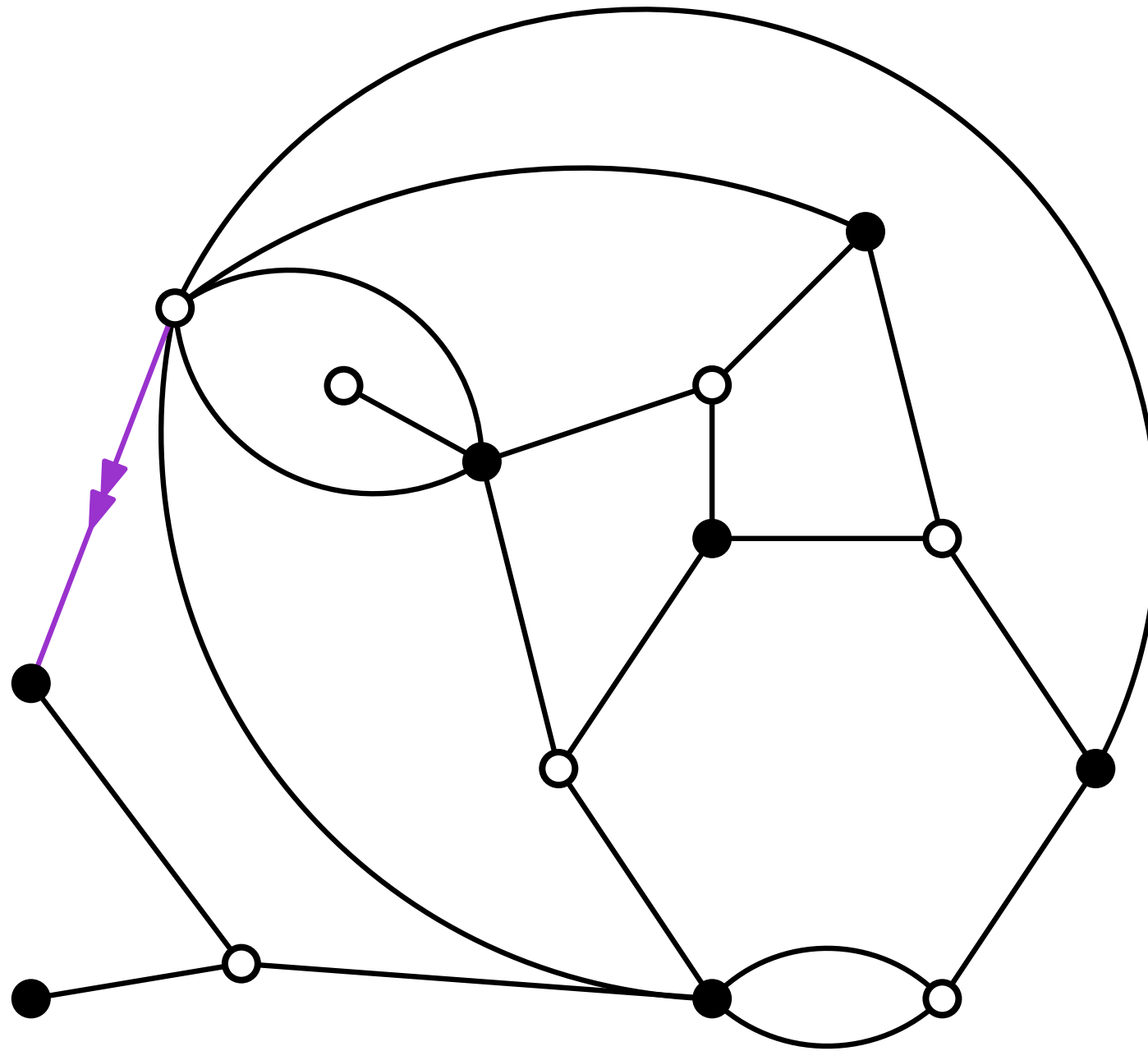
## Problèmes :

- Collage : choix des chemins d'ouverture ?
- Coupe : choix du cycle de coupe ?

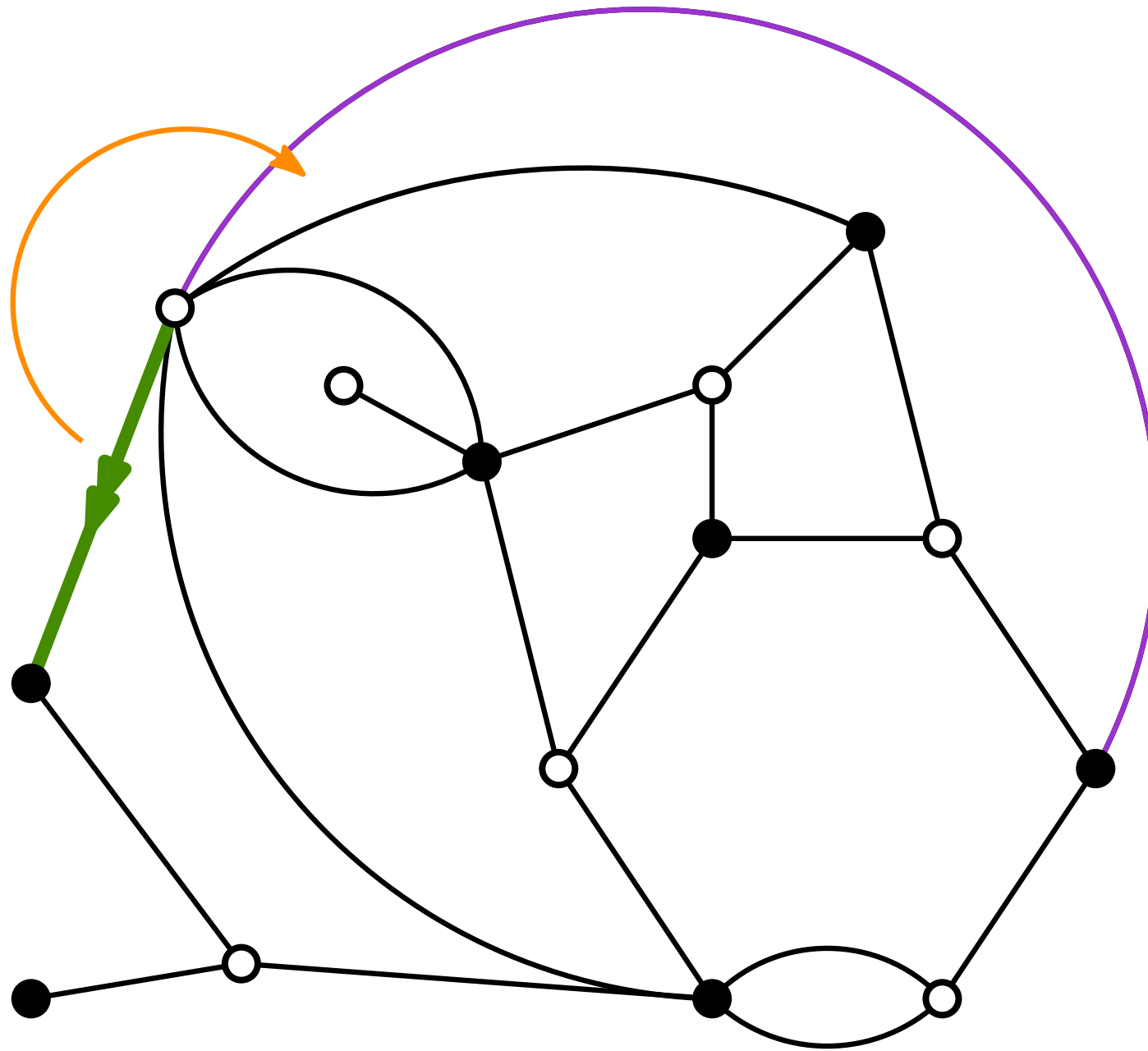
⇒ arbre couvrant.

↔  $2(f(\mathbf{d}) - 1) =$  arête orientée n'appartenant pas à l'arbre couvrant.

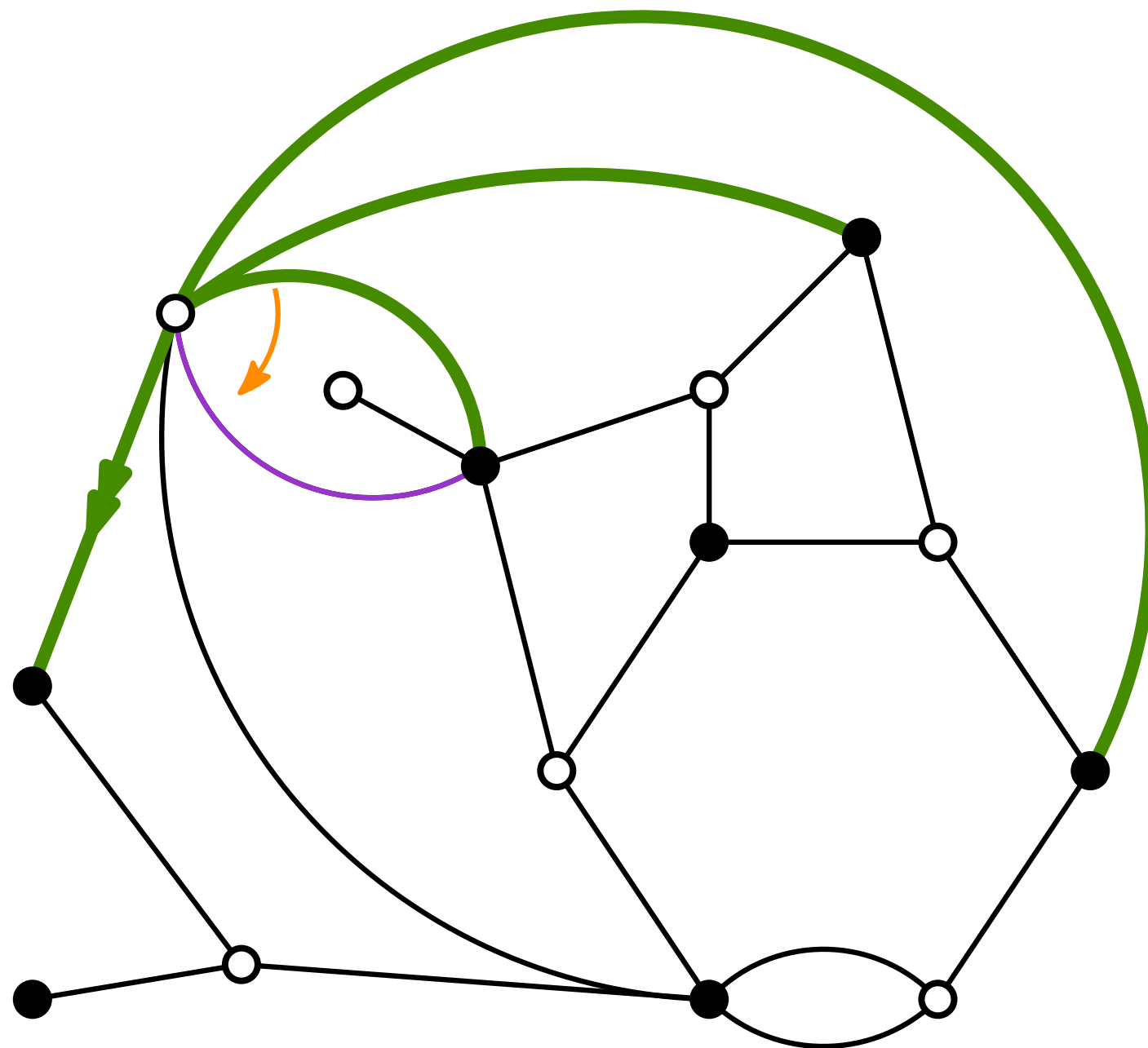
# Arbre de parcours en largeur



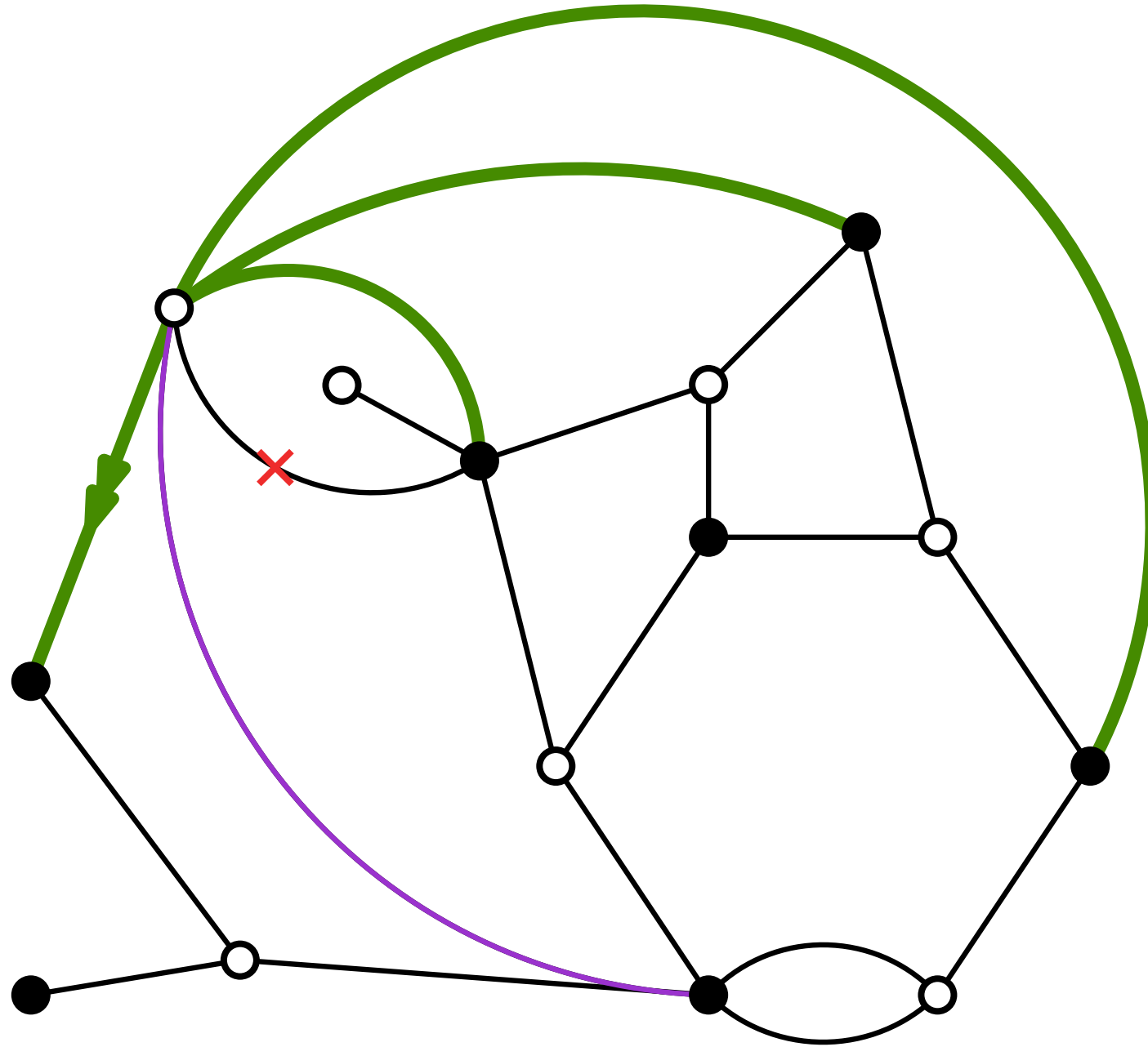
# Arbre de parcours en largeur



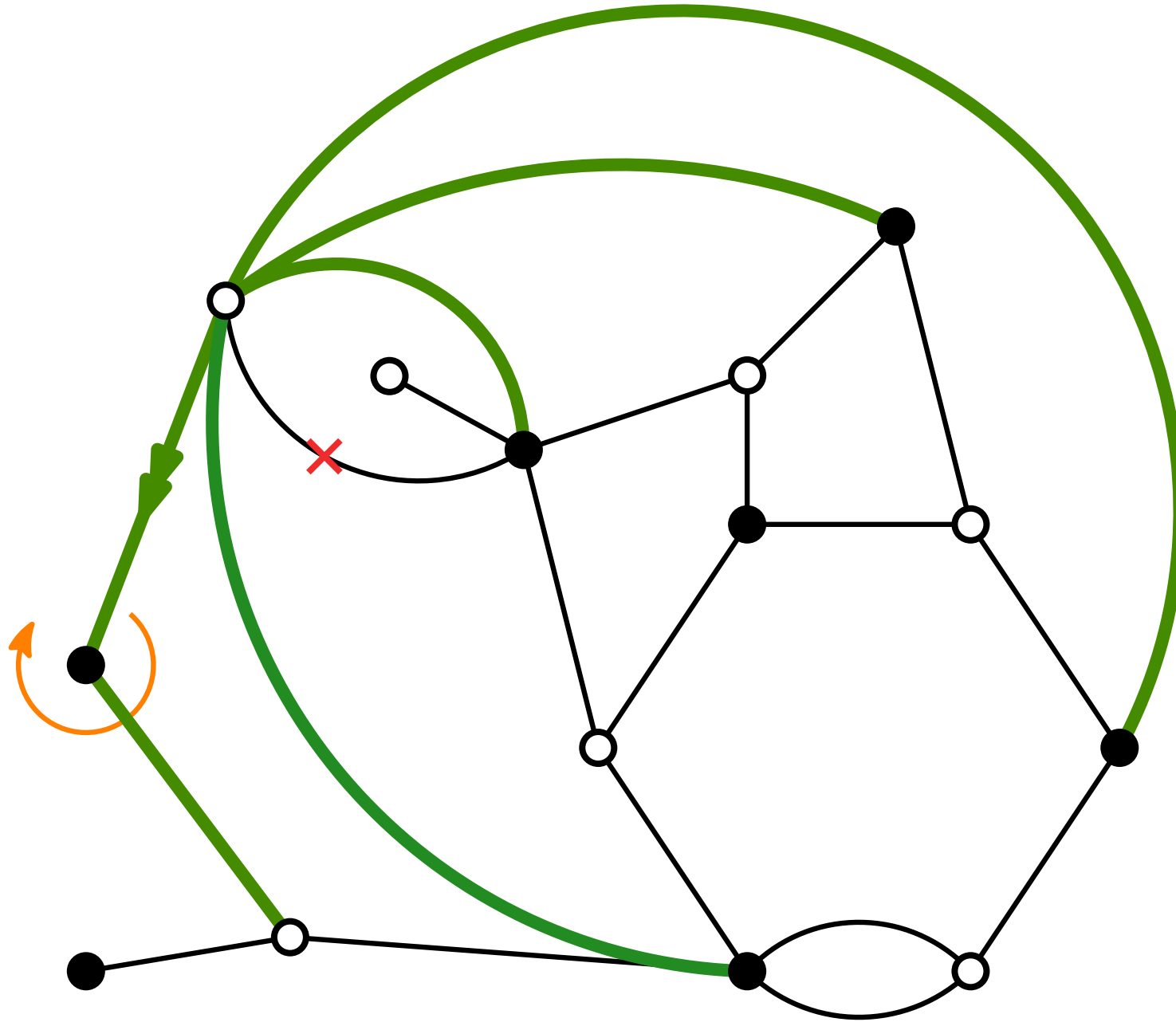
# Arbre de parcours en largeur



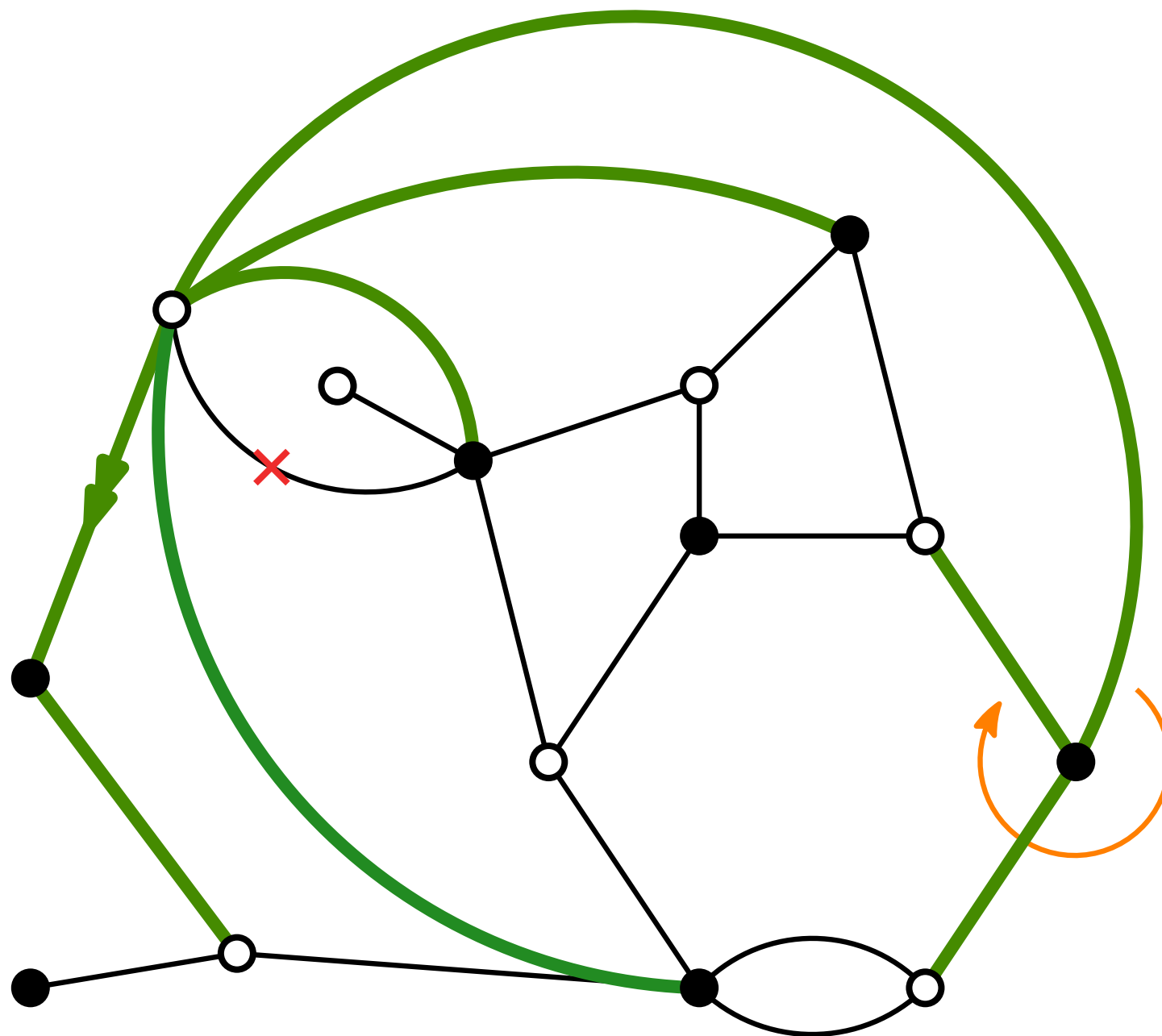
# Arbre de parcours en largeur



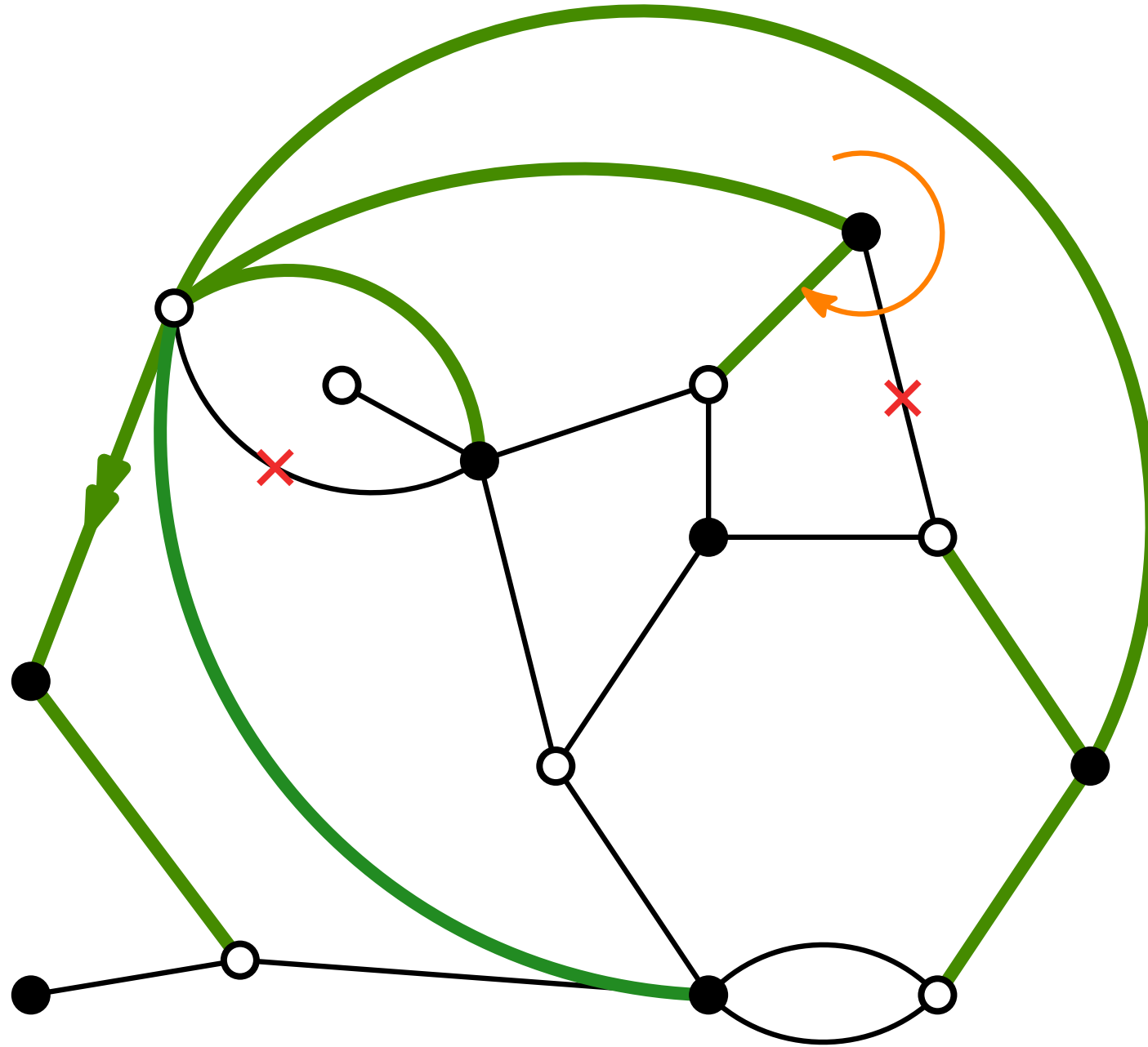
# Arbre de parcours en largeur



# Arbre de parcours en largeur

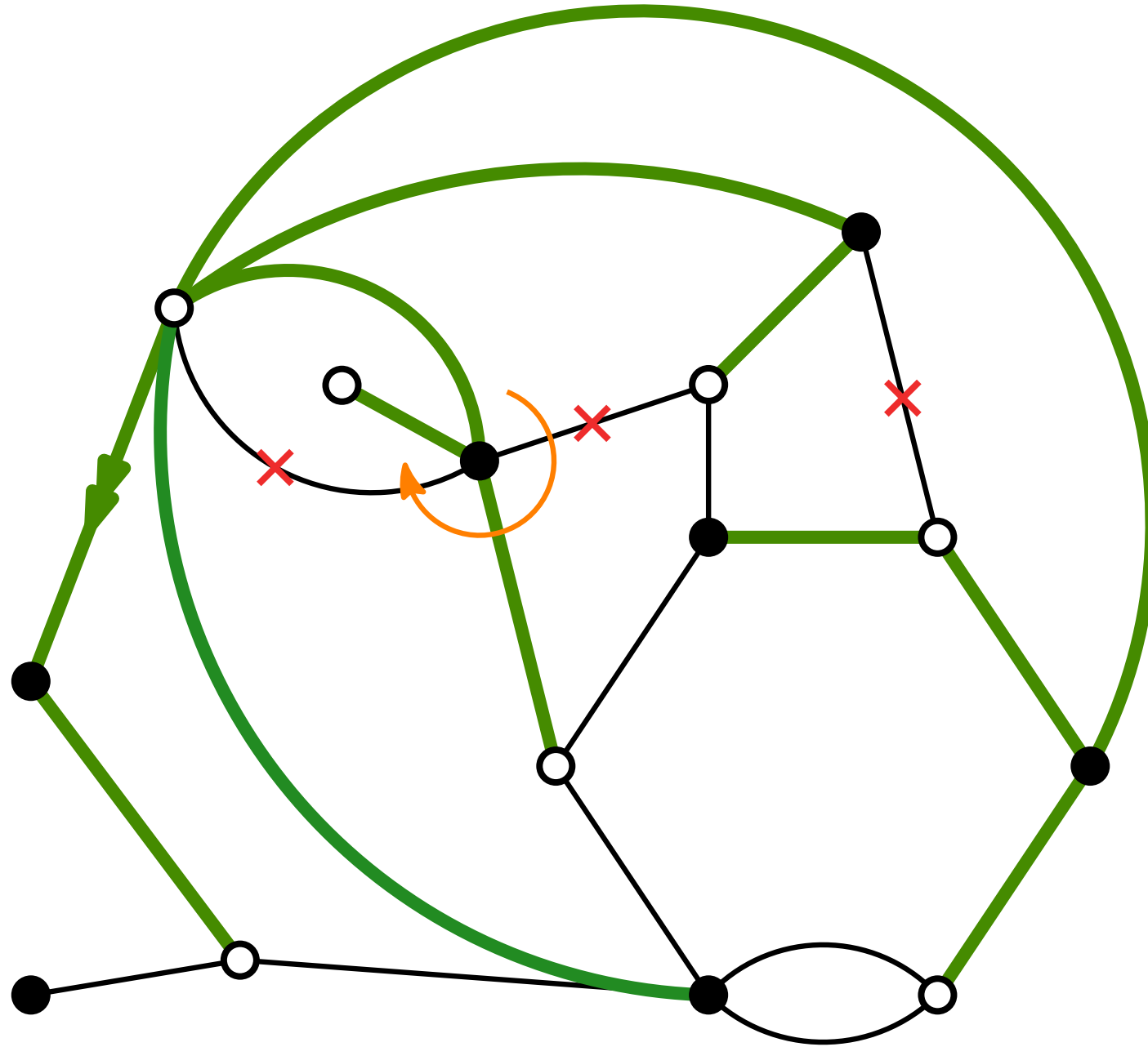


# Arbre de parcours en largeur

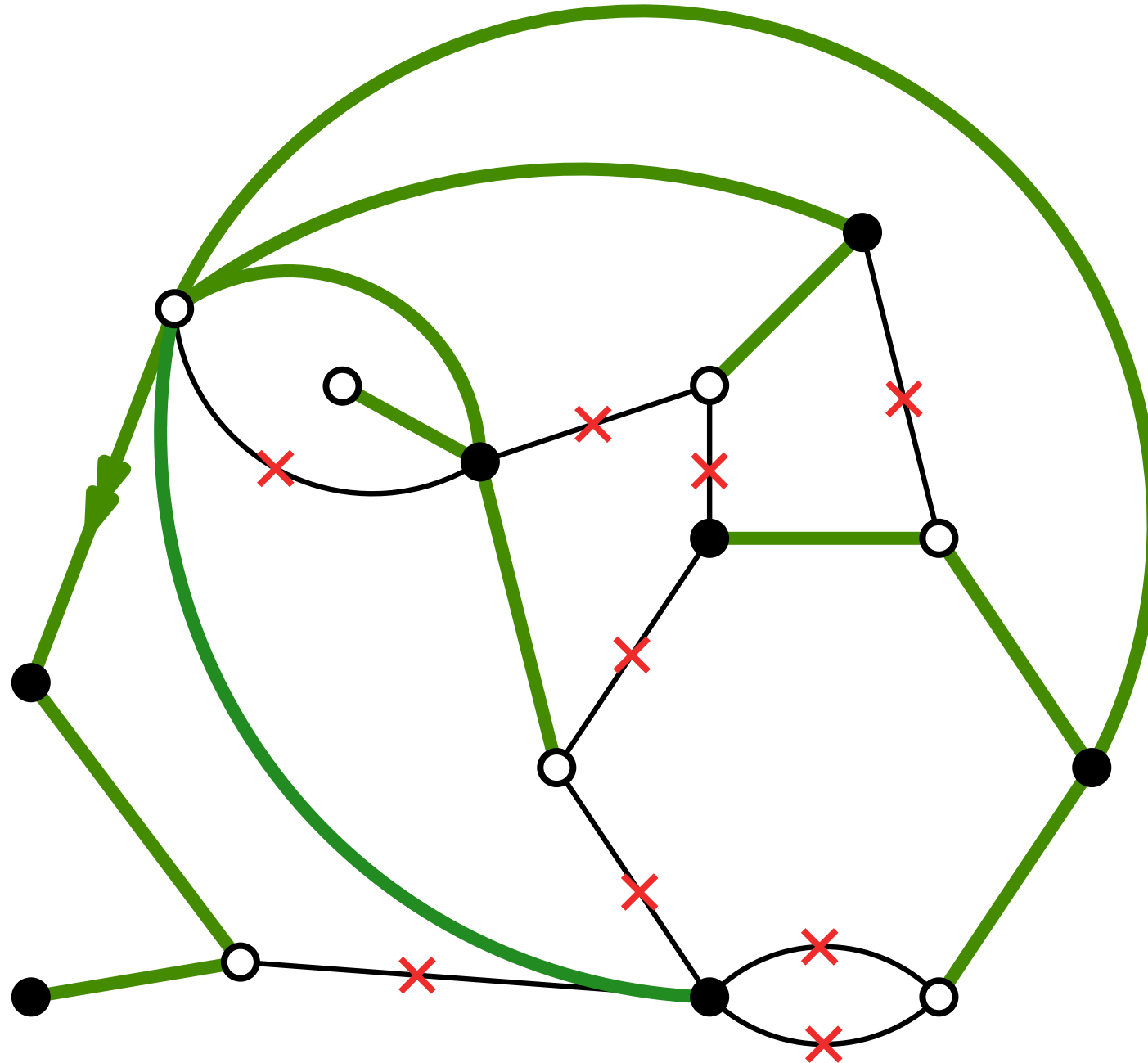




# Arbre de parcours en largeur

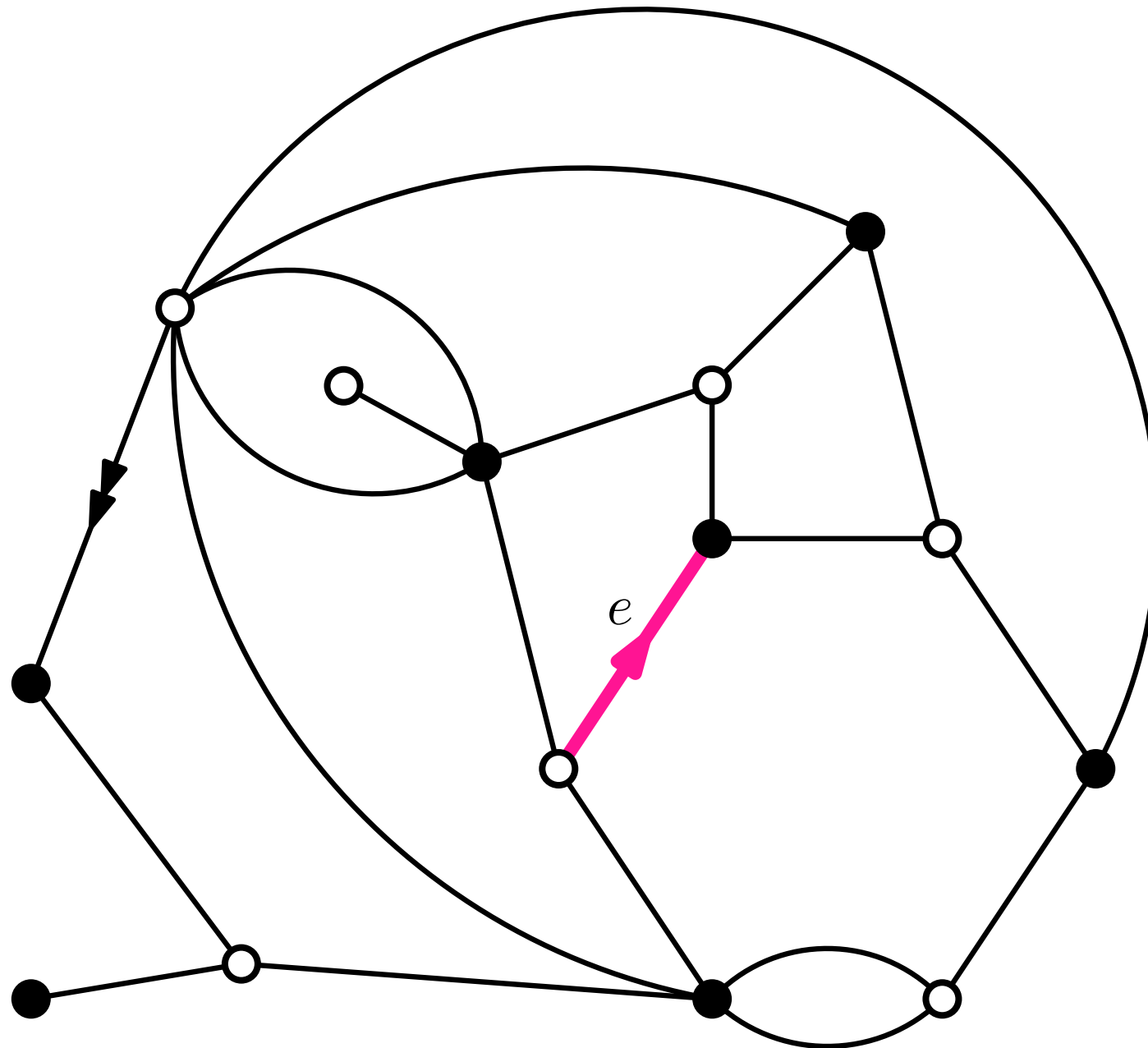


# Arbre de parcours en largeur



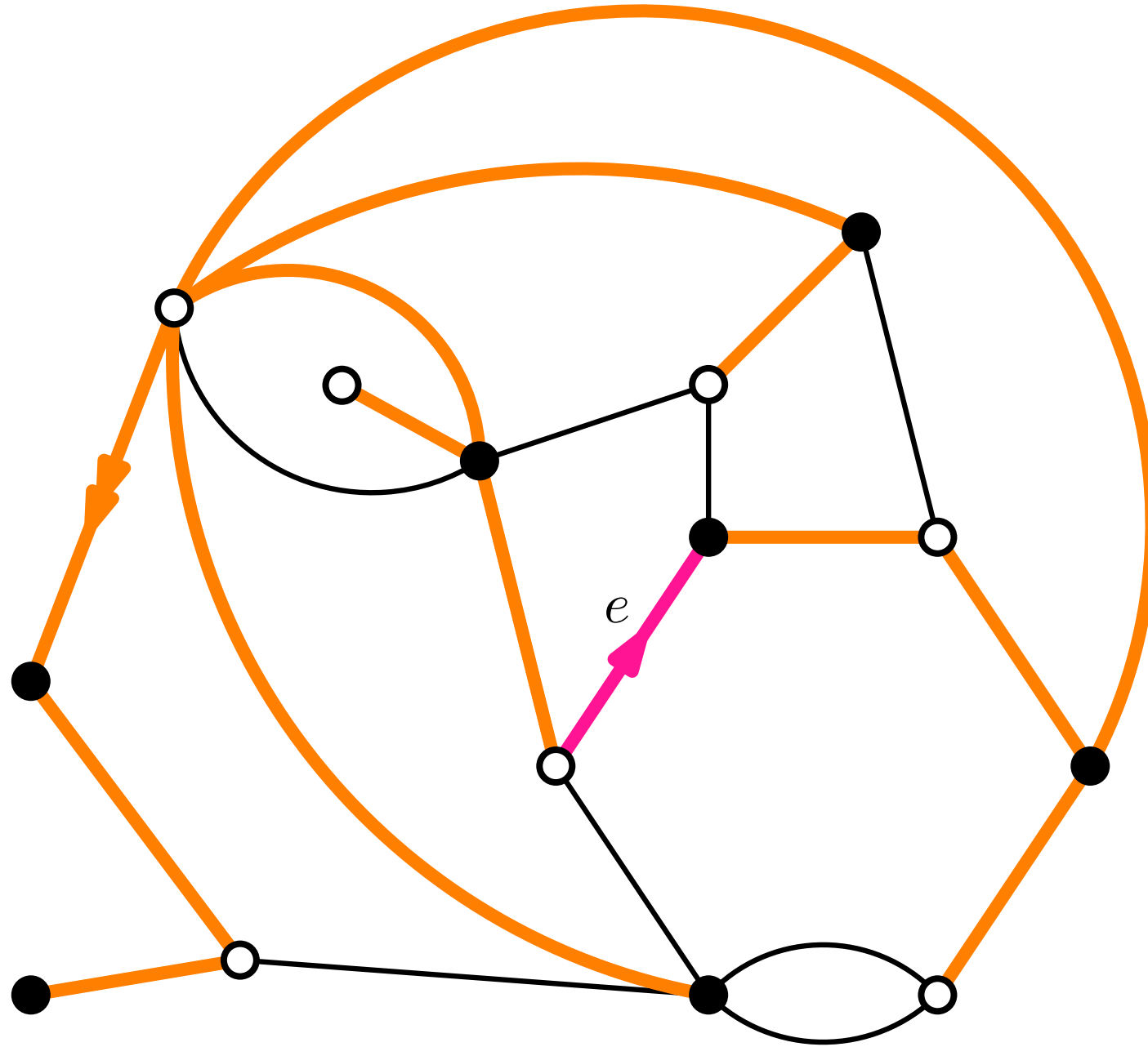
# Cas général : coupe

$(M, -)$



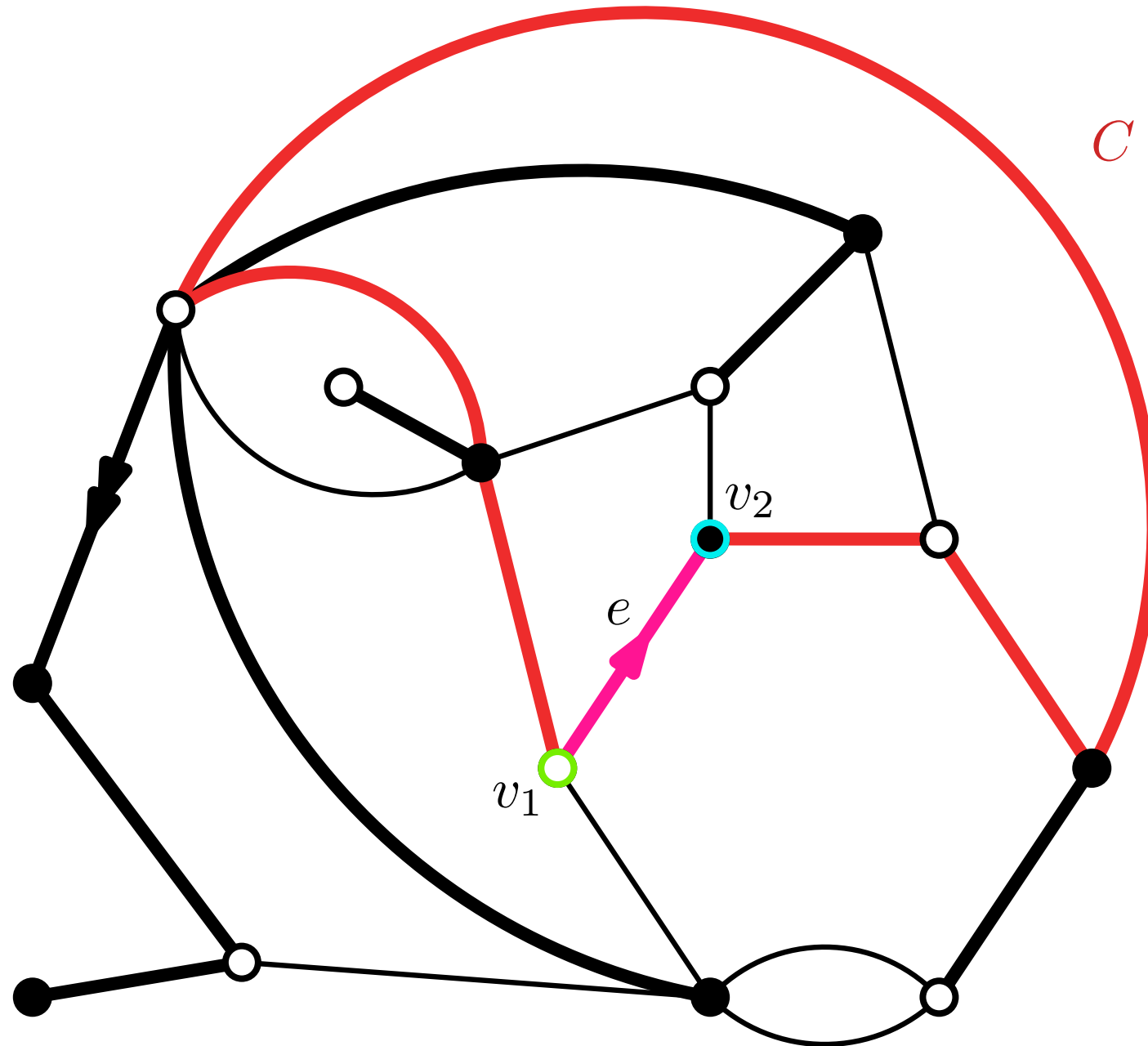
# Cas général : coupe

$(M, -)$

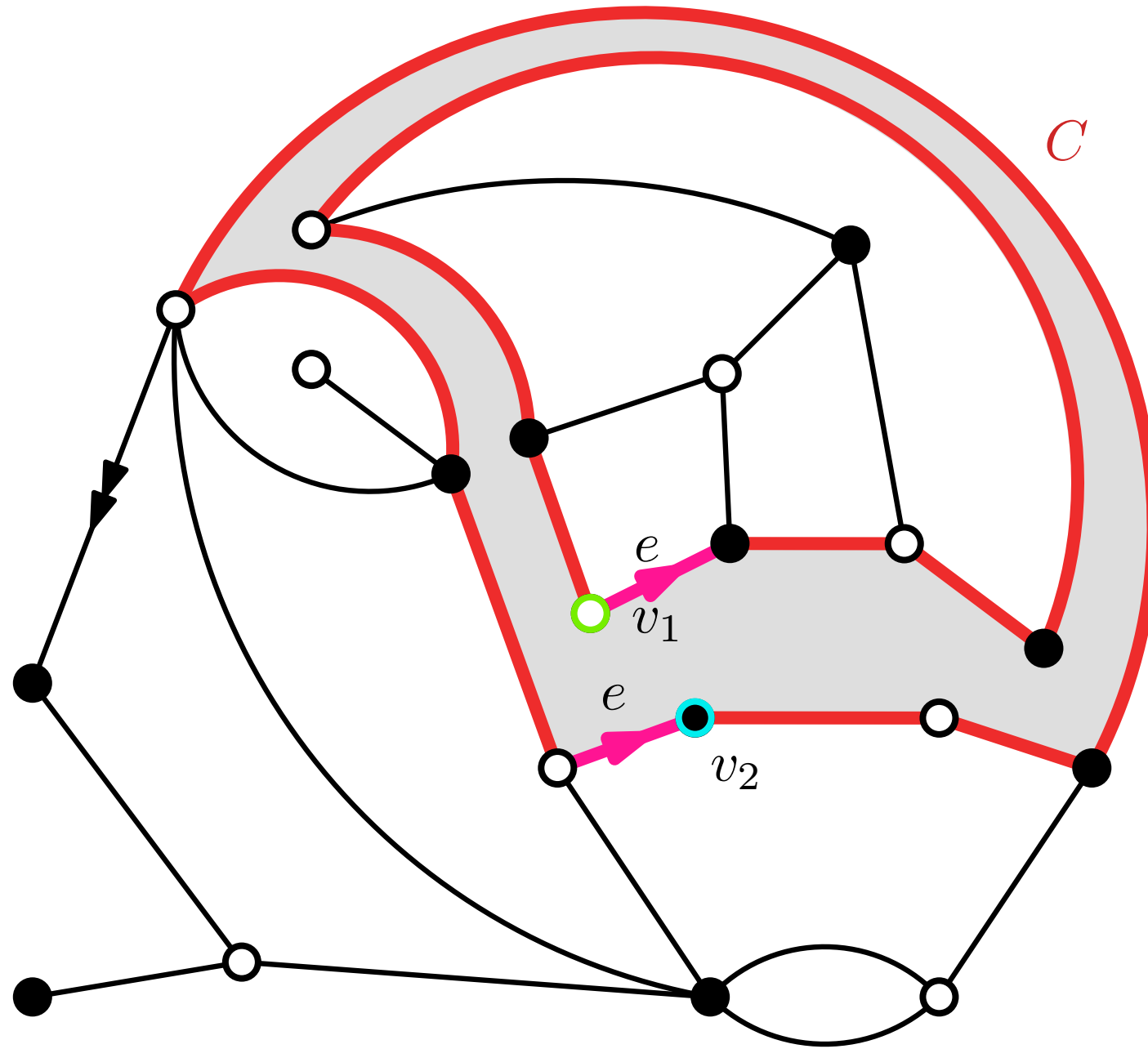


# Cas général : coupe

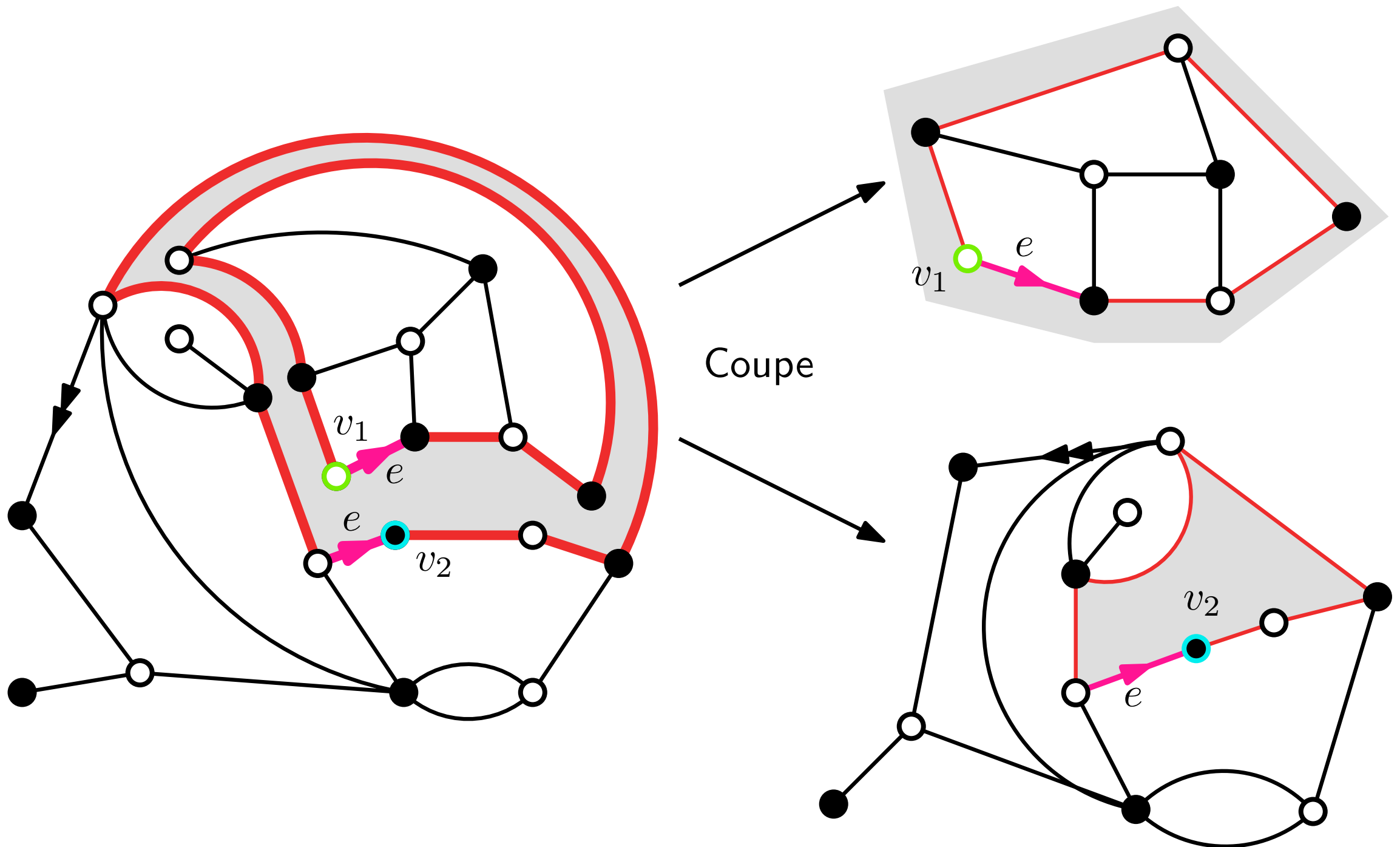
$(M, -)$



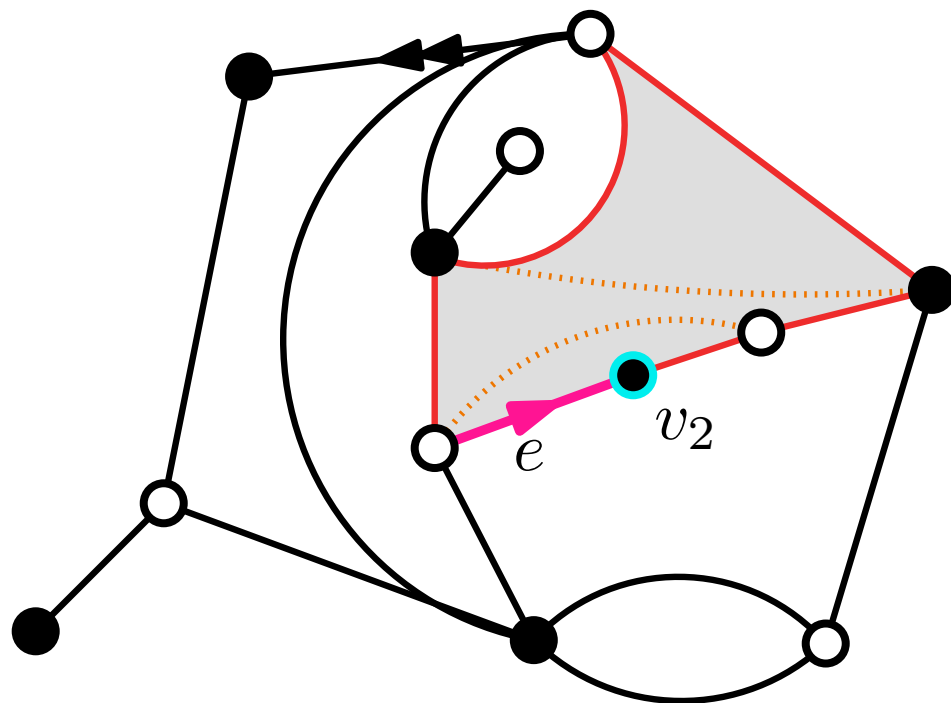
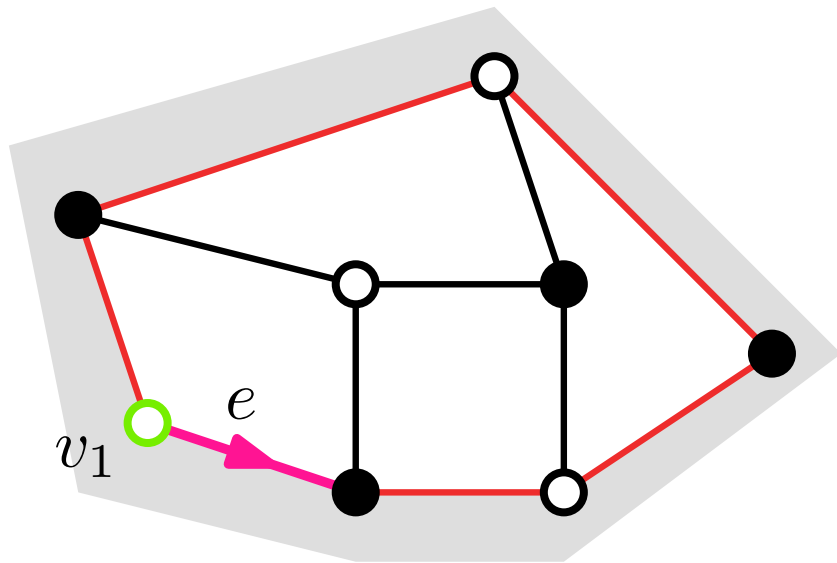
# Cas général : coupe



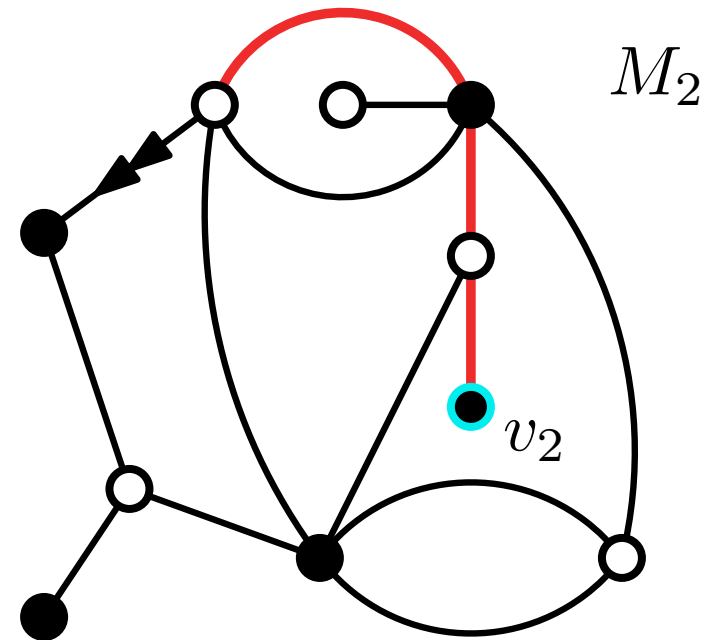
# Cas général : coupe



# Cas général : coupe

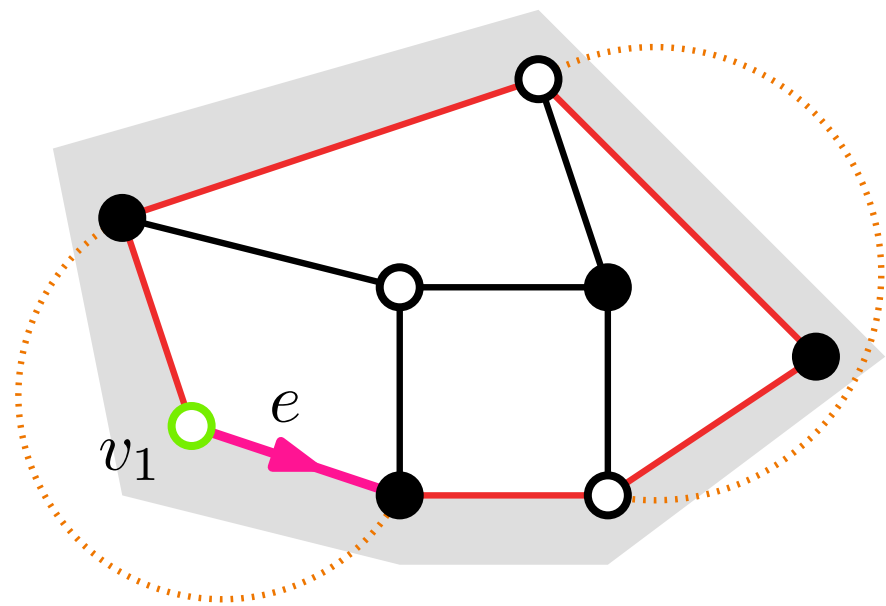


Fermeture  
→

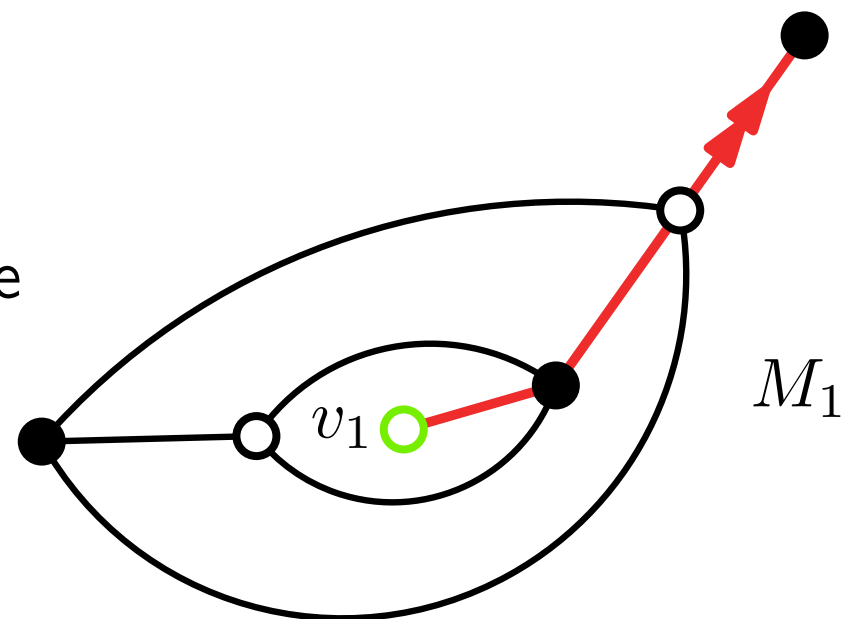




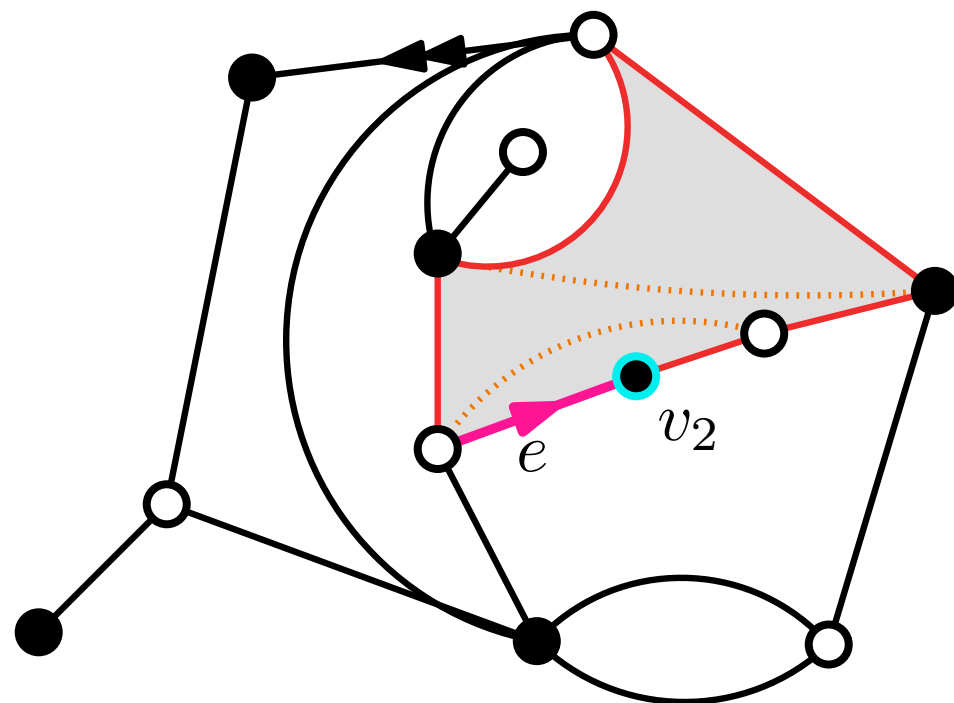
# Cas général : coupe



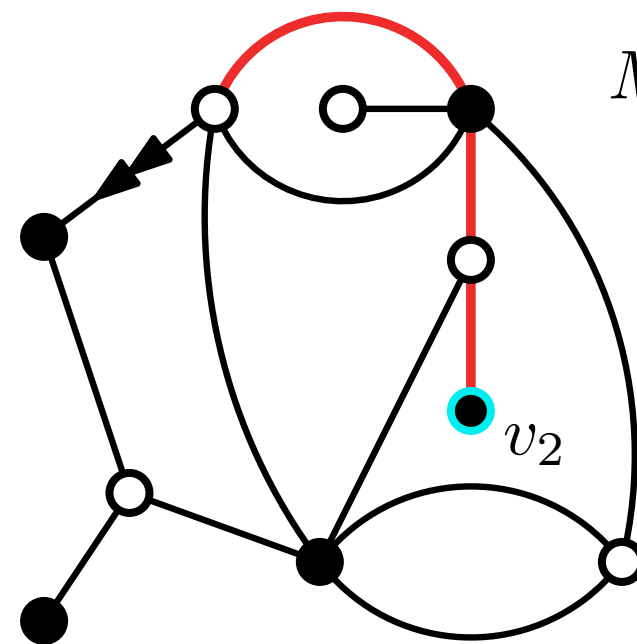
Fermeture



$M_1$

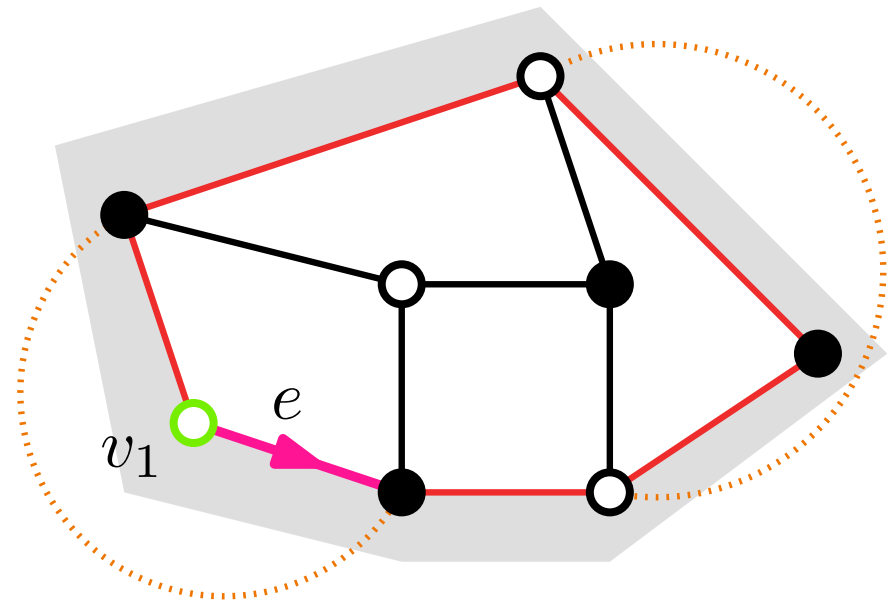


Fermeture

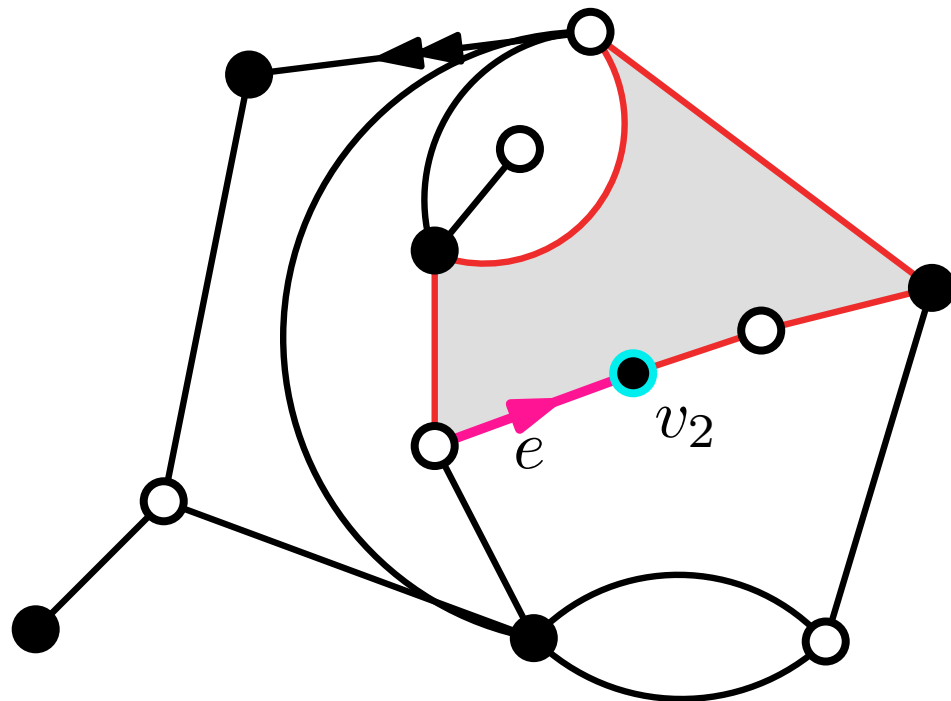
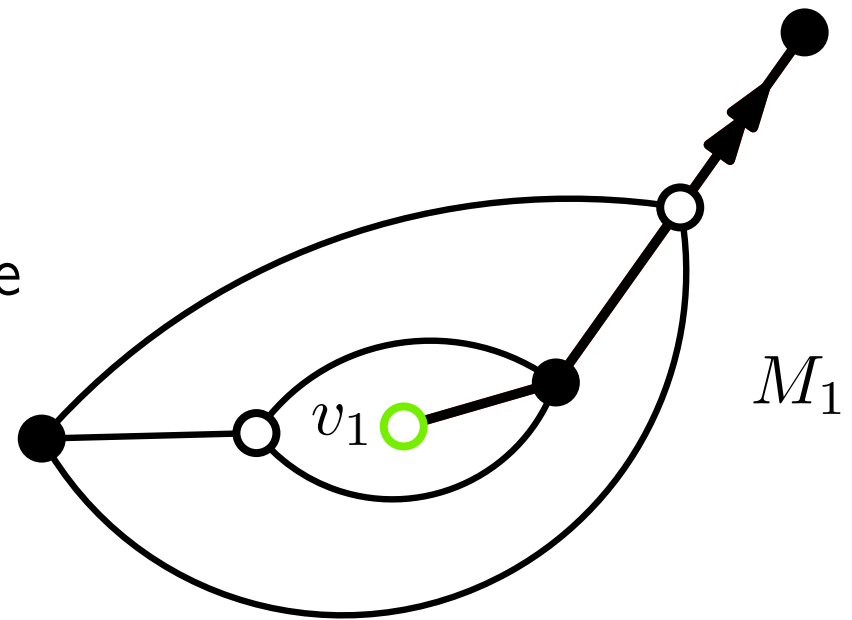


$M_2$

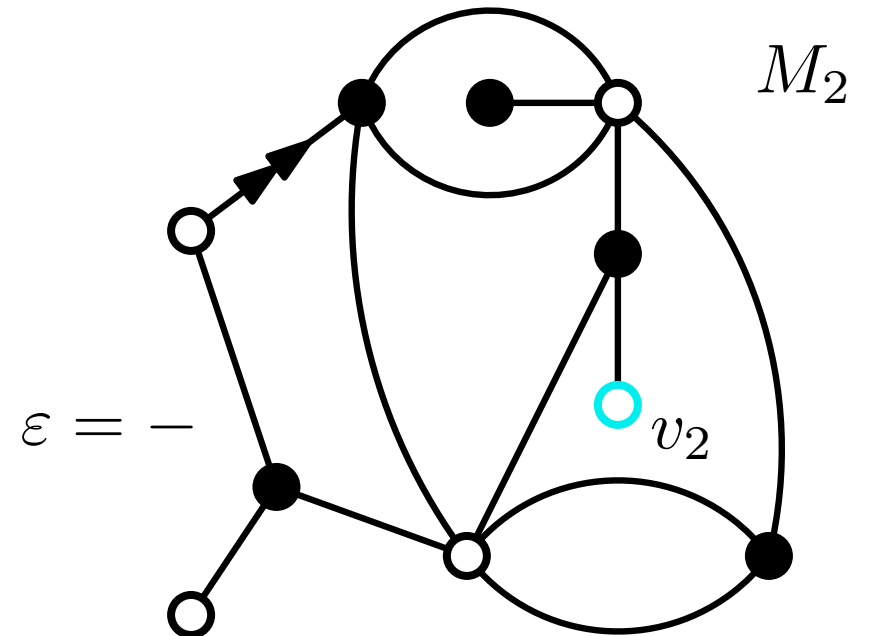
# Cas général : coupe



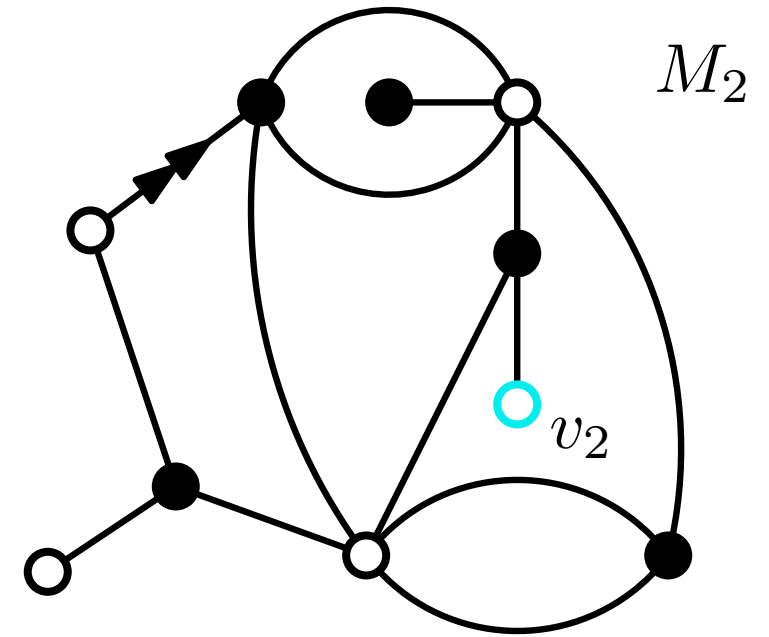
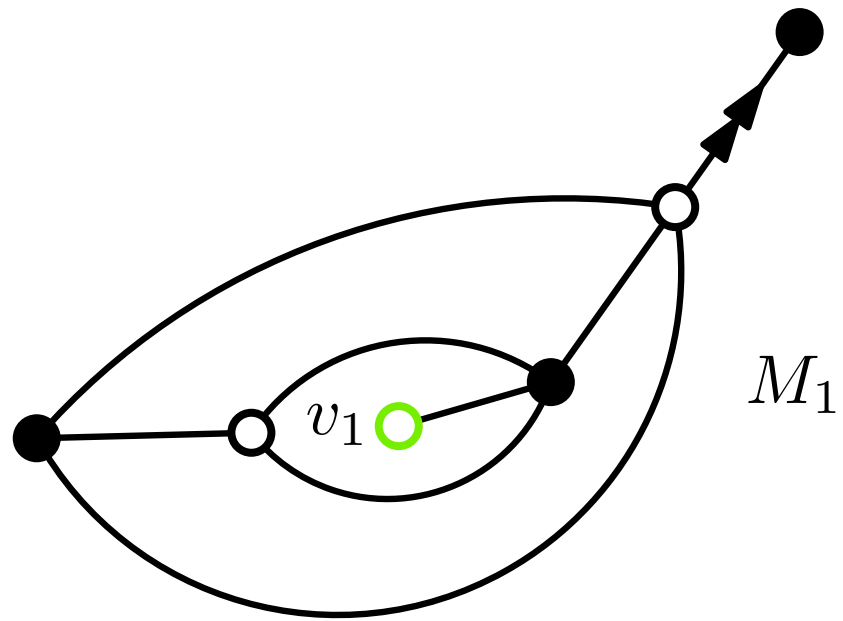
Fermeture



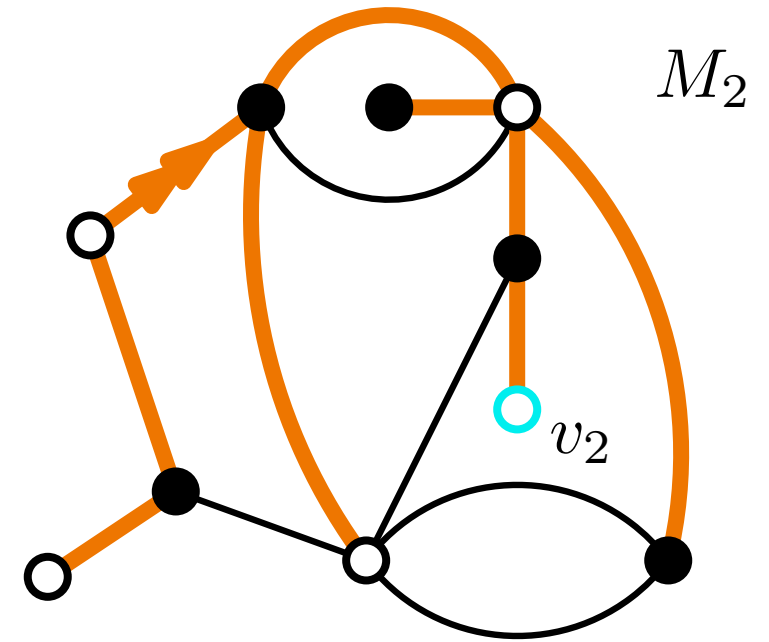
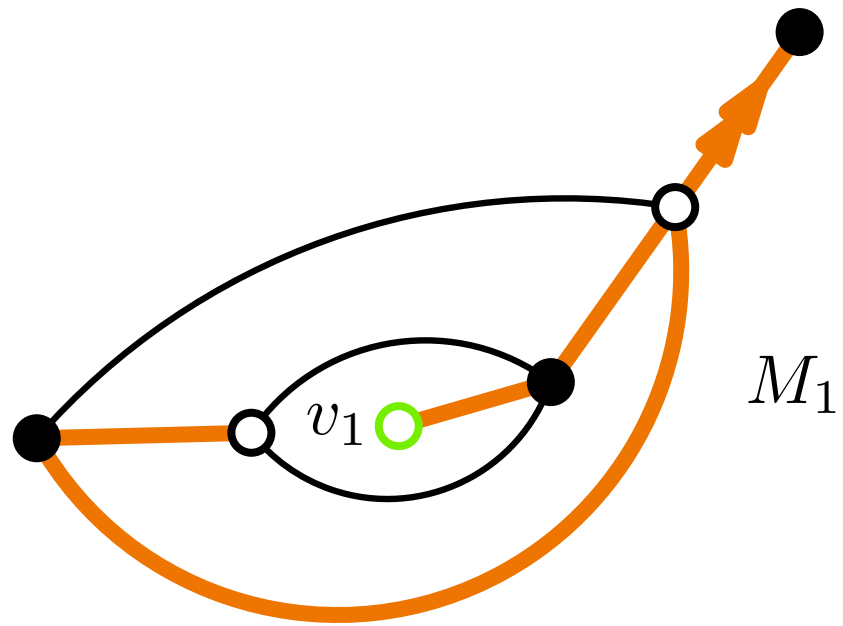
Fermeture



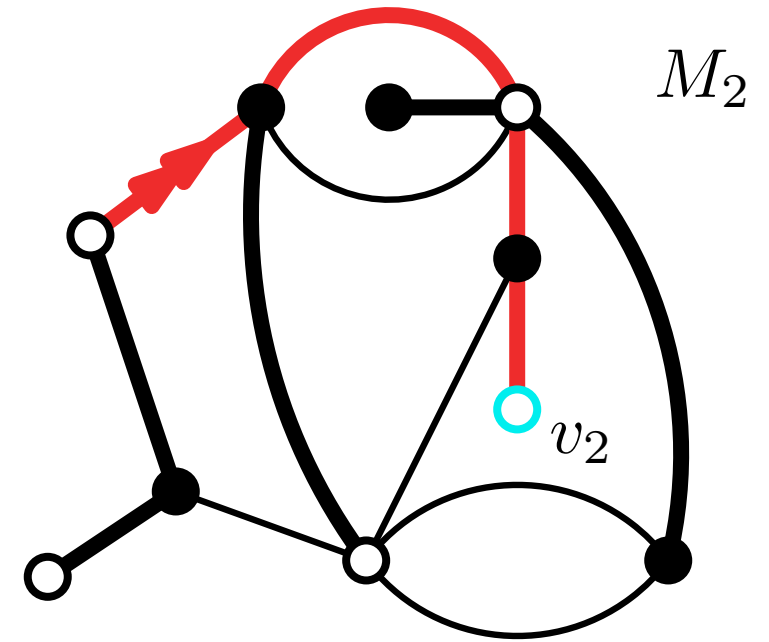
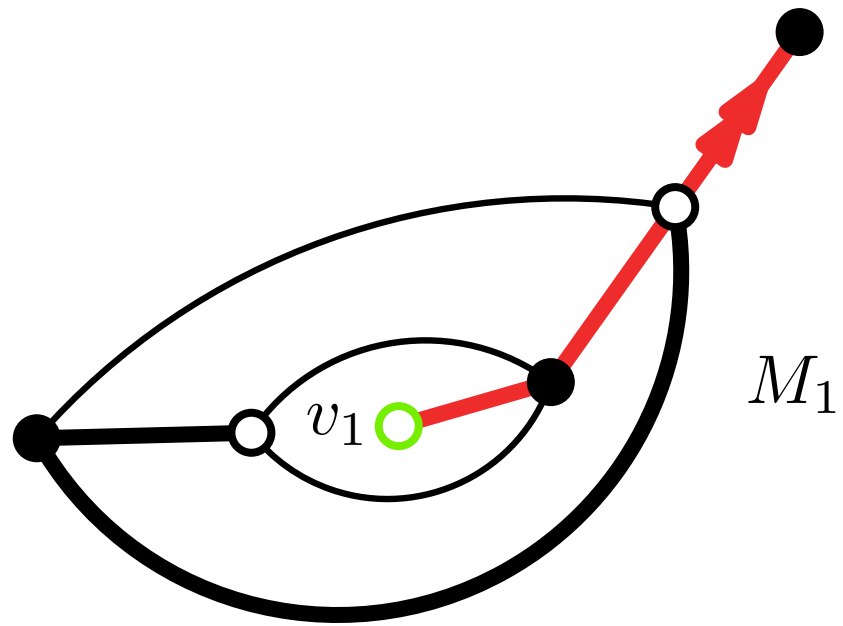
# Cas général : collage



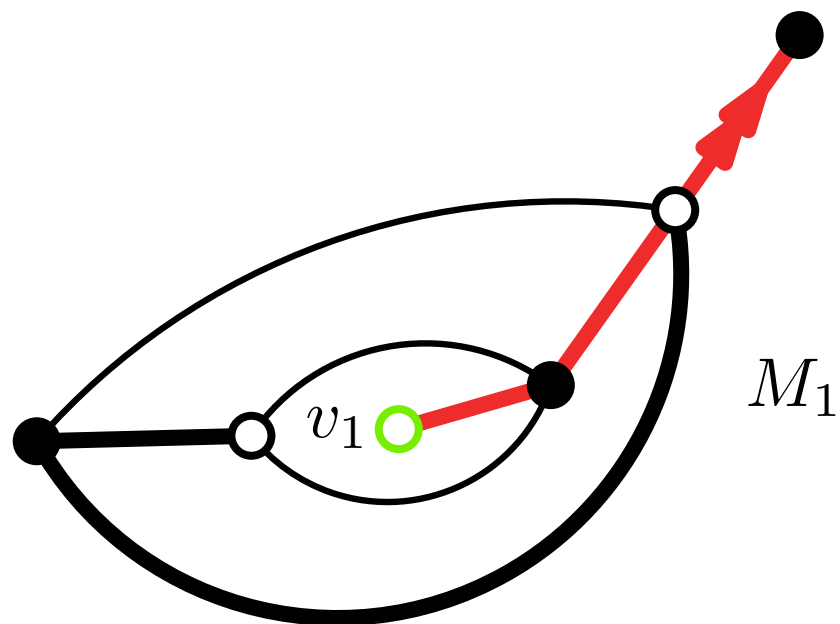
# Cas général : collage



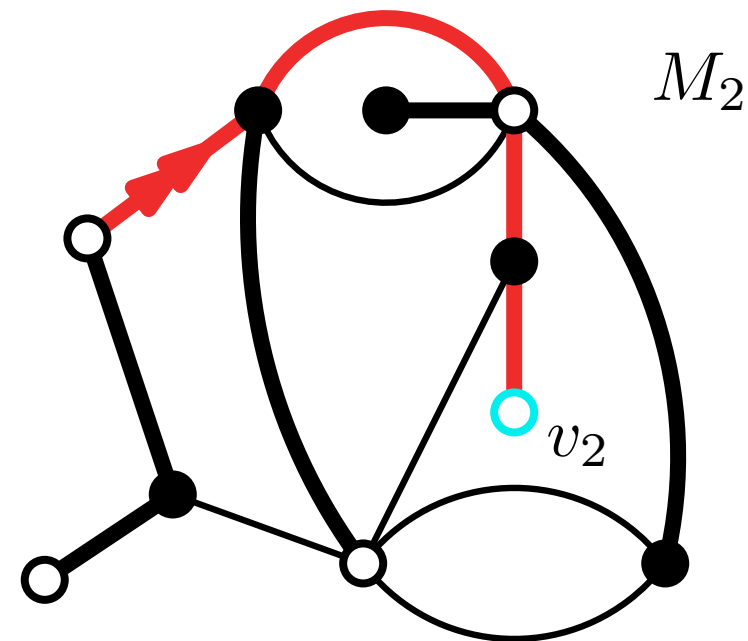
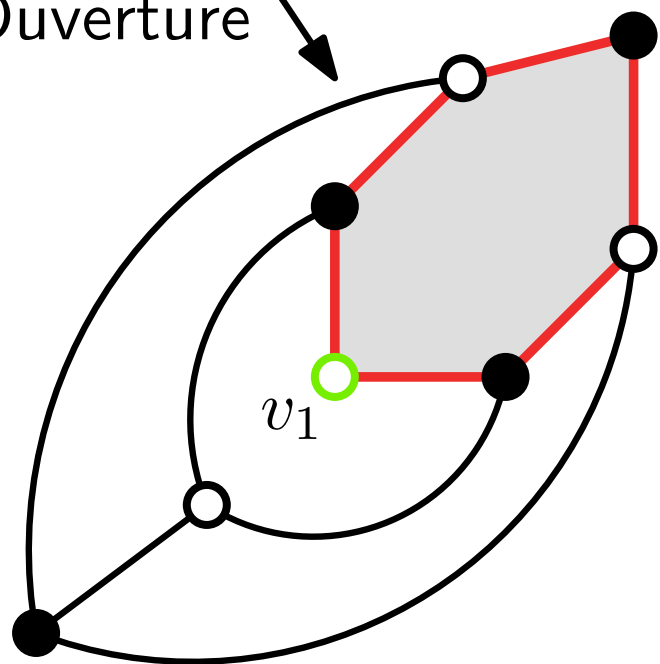
# Cas général : collage



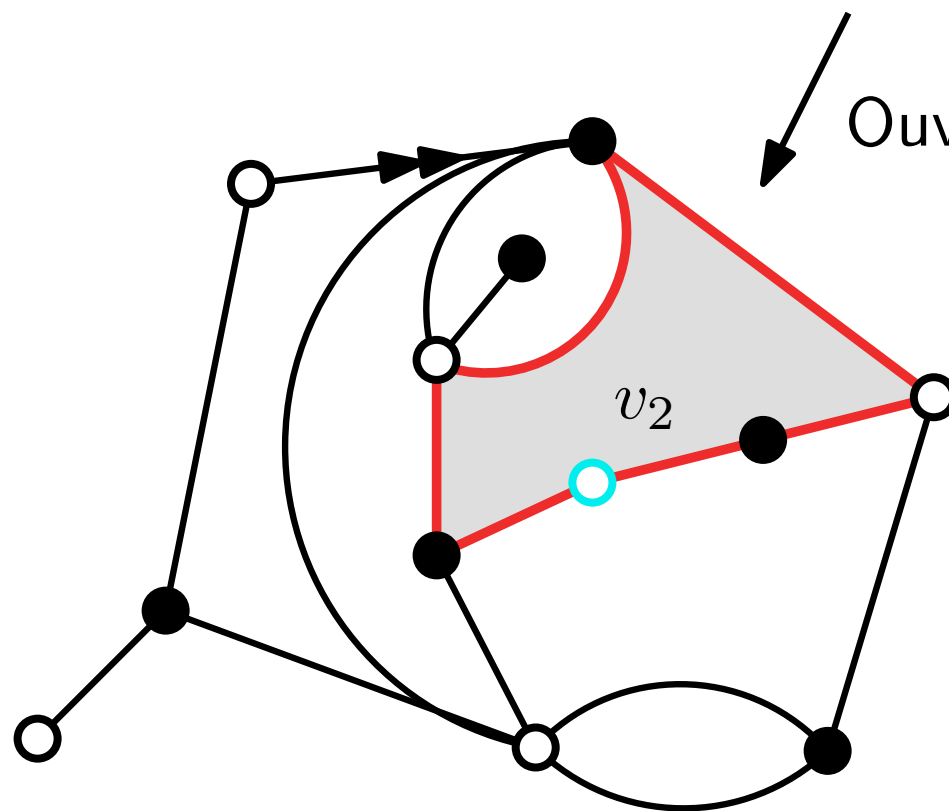
# Cas général : collage



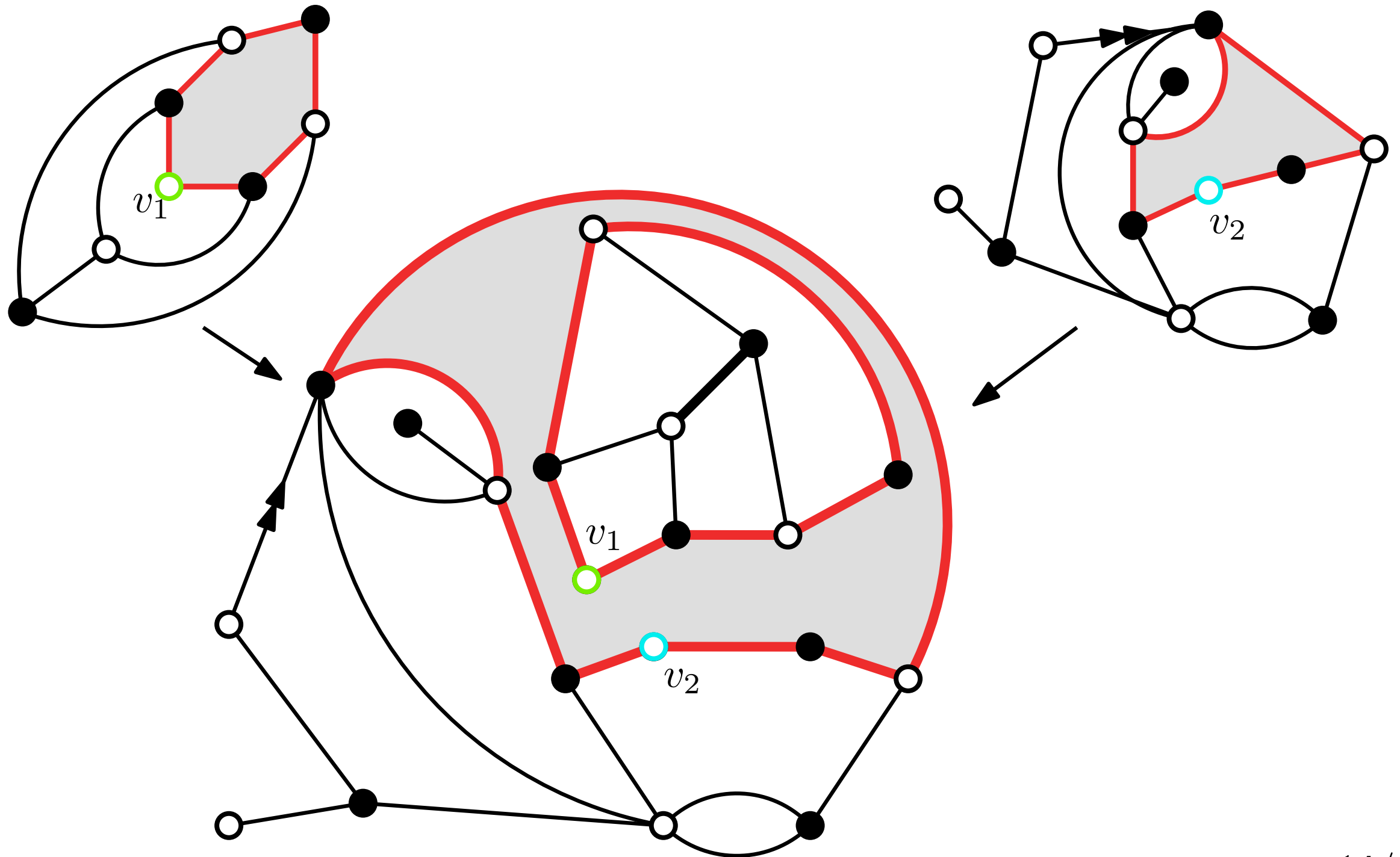
Ouverture



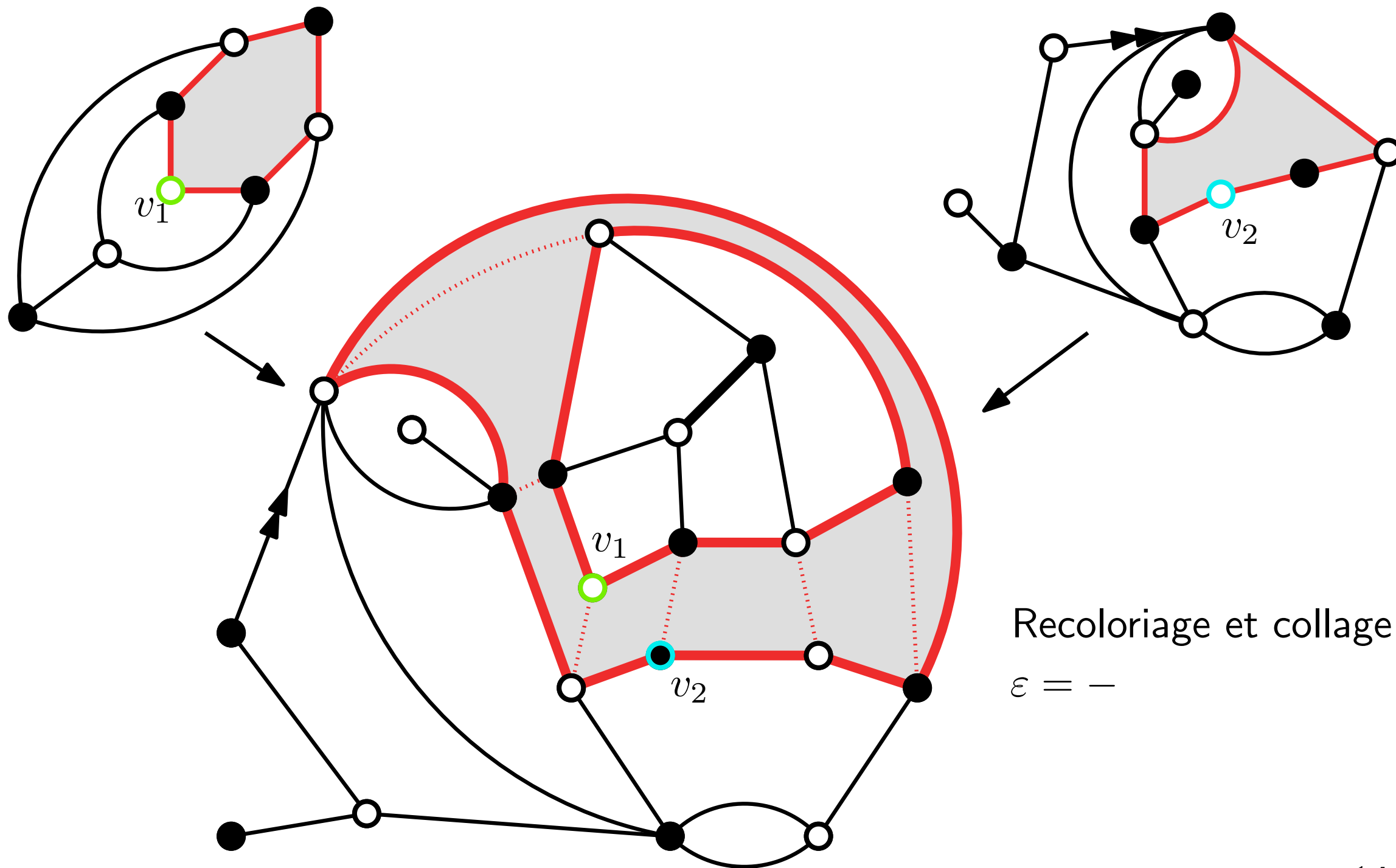
Ouverture



# Cas général : collage



# Cas général : collage



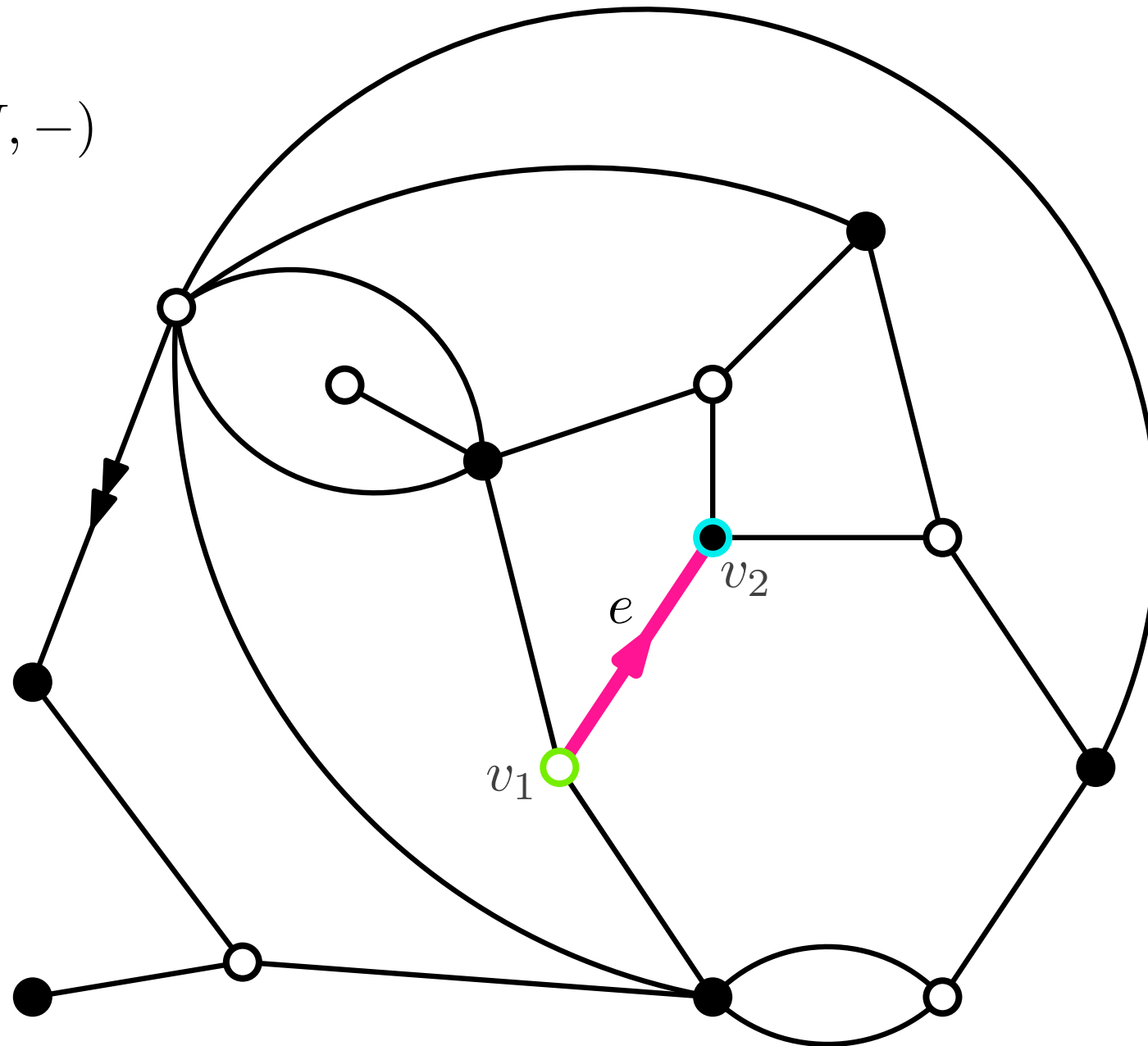
Recoloriage et collage

$\varepsilon = -$



# Cas général : collage

$(M, -)$

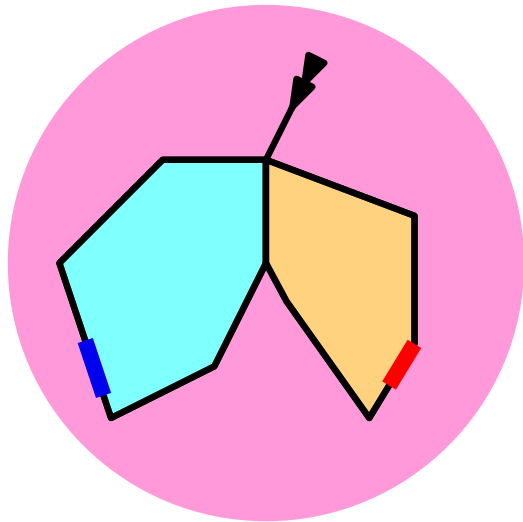


# Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d}) - 1)(f(\mathbf{d}) - 2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$

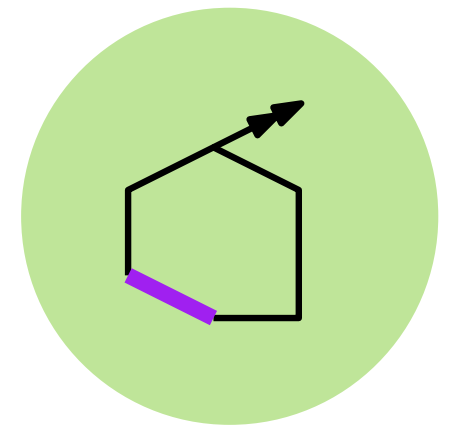
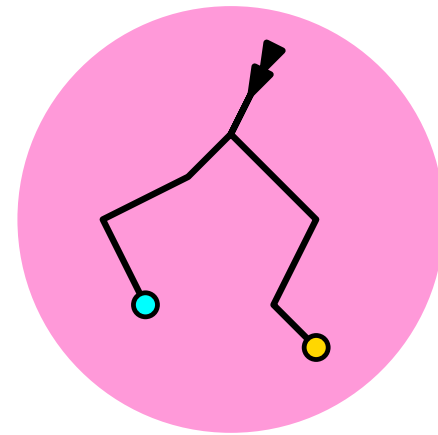
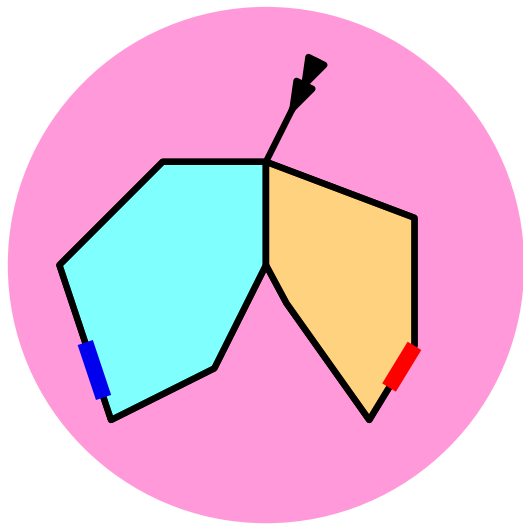
# Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d}) - 1)(f(\mathbf{d}) - 2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



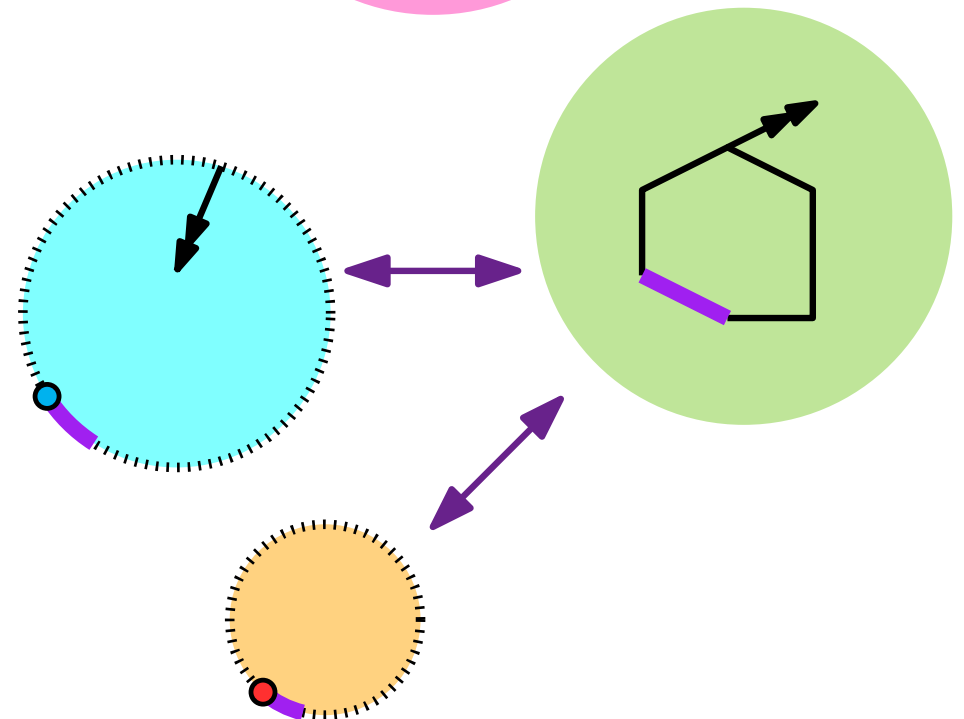
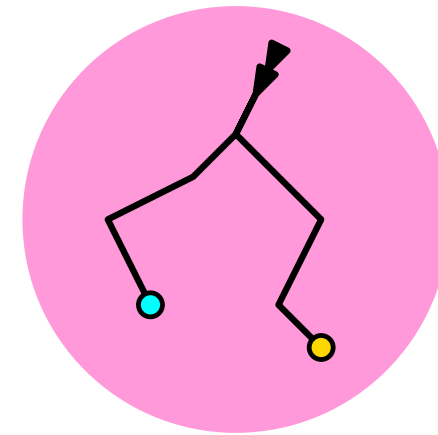
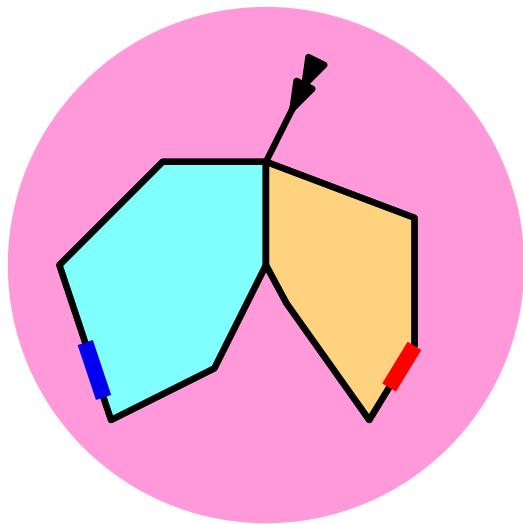
# Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d}) - 1)(f(\mathbf{d}) - 2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



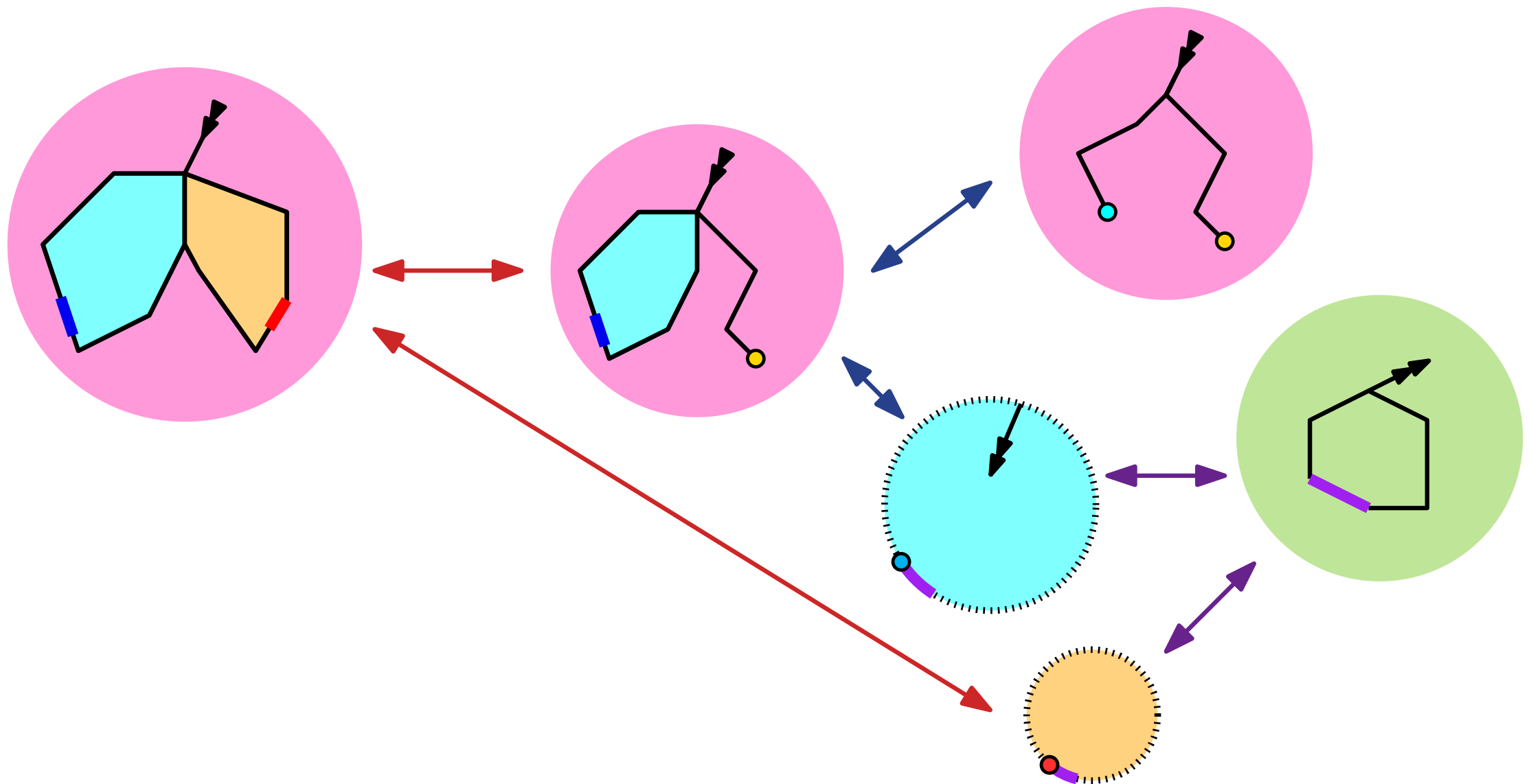
# Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d}) - 1)(f(\mathbf{d}) - 2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



# Seconde bijection

$$(f(\mathbf{d}) - 1)(f(\mathbf{d}) - 2)B(\mathbf{d}) = \sum_{\mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{d}} (f(\mathbf{s}) - 1)v(\mathbf{t})(v(\mathbf{t}) - 1)B(\mathbf{s})B(\mathbf{t})$$



# Perspectives

- ▶ Cas unicellulaire de la formule de Louf :

$$\binom{n+1}{2} B_g(n) = \sum_{g^* \geq 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} B_{g-g^*}(n).$$

- ▶ Formule de Tutte pour les triangulations  $q$ -coloriées :

$$(n+3)(n+2)T(n+1) = 2(q-4)(3n+1)T(n) + 2 \sum_{k=0}^n (3k+1)T(k)(n-k+2)(n-k+1)T(n-k).$$

- ▶ Cas général d'autres formules issues de KP (Goulden-Jackson, Carrell-Chapuy).

# Perspectives

- ▶ Cas unicellulaire de la formule de Louf :

$$\binom{n+1}{2} B_g(n) = \sum_{g^* \geq 0} \binom{v+2g^*}{2g^*+2} B_{g-g^*}(n).$$

- ▶ Formule de Tutte pour les triangulations  $q$ -coloriées :

$$(n+3)(n+2)T(n+1) = 2(q-4)(3n+1)T(n) + 2 \sum_{k=0}^n (3k+1)T(k)(n-k+2)(n-k+1)T(n-k).$$

- ▶ Cas général d'autres formules issues de KP (Goulden-Jackson, Carrell-Chapuy).

Merci !