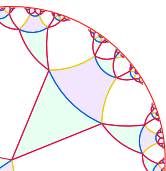


Calculs dans les graphes de Cayley planaires localement finis

David RENAULT

Groupe de travail de Combinatoire / LaBRI
le 28 mai 2010



Petite introduction rapide

Dans cet exposé, on va considérer des groupes.

Définition : Groupe

Un *groupe* G est un ensemble muni d'une loi $(\cdot) : G \times G \rightarrow G$ telle que :

- La loi (\cdot) est associative. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- Elle admet un élément identité ϵ . $a \cdot \epsilon = \epsilon \cdot a = a$
- Tout élément $a \in G$ admet un inverse a^{-1} . $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = \epsilon$

- Un groupe G est *engendré* par un sous-ensemble (fini) de générateurs $S = \{g_1, \dots, g_n\}$ si tout élément de G peut s'écrire comme produit d'éléments de S .

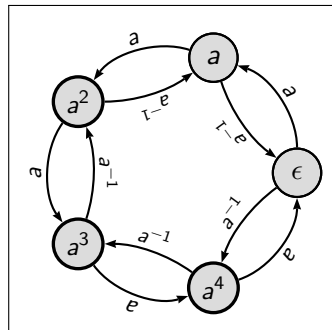
Petite introduction rapide

Dans cet exposé, on va considérer des ~~groupes~~ graphes de Cayley.

Définition : Graphe de Cayley

Le *graphe de Cayley* Γ d'un groupe G engendré par S est le graphe :

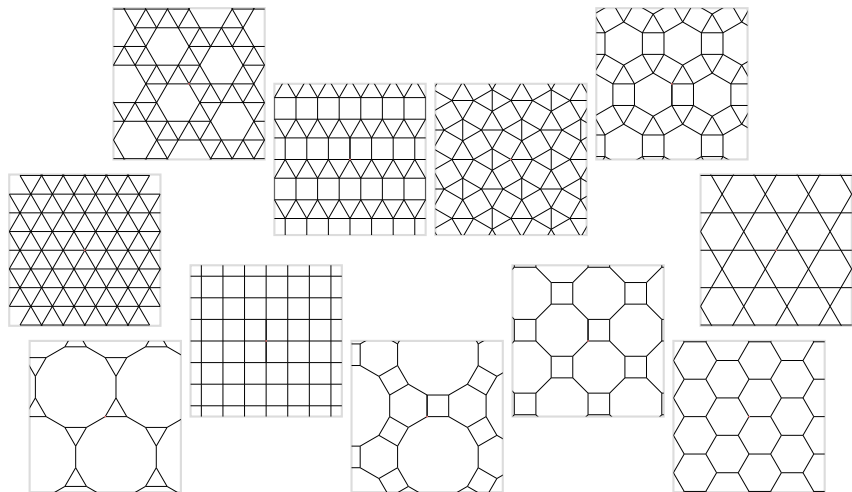
- les sommets de Γ sont les éléments de G ;
- une arête $g \xrightarrow{g_i} h$ relie les sommets (g, h) ssi $g \cdot g_i = h$.



- Pour simplifier, on rassemble les arêtes (g, h) et (h, g) en une seule.

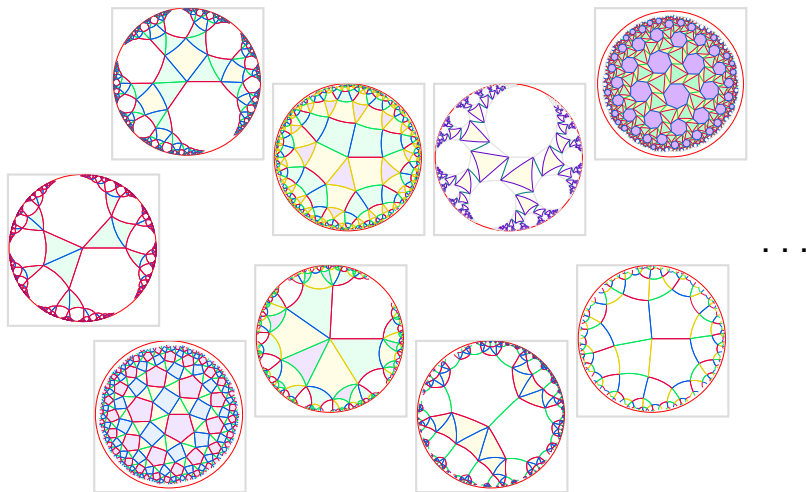
Petite introduction rapide

On considère des graphes de Cayley planaires.



Petite introduction rapide

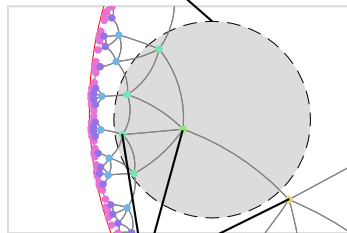
On considère des graphes de Cayley planaires **dans le plan hyperbolique**.



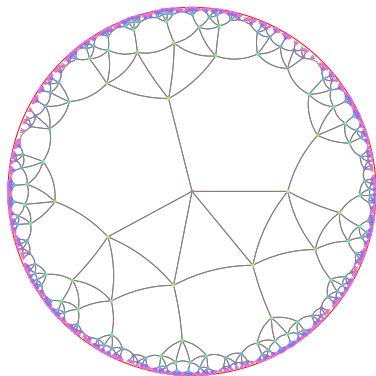
Petite introduction rapide

Un plongement d'un graphe planaire est dit **localement fini** lorsque ses sommets n'ont pas de points d'accumulation dans le plan.

Compact



Sommets



Mais pourquoi planaires ?

Il existe plusieurs types de problèmes/calculs intrinsèquement reliés à la géométrie du plan hyperbolique :

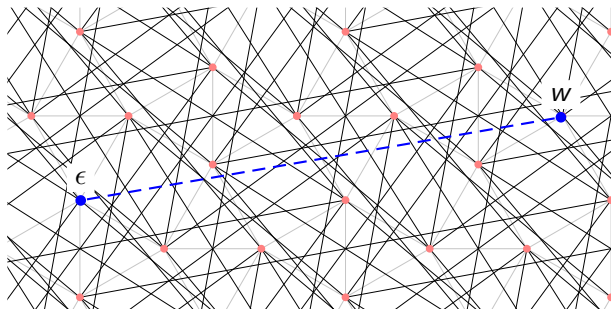
- **Théorie combinatoire des groupes** (problèmes de Dehn [Deh12] : problèmes du mot, de l'isomorphisme, de la discrétude [Ros86, Gil95])
- **Décidabilité de la logique** (logique FO équivalente au problème du mot [Gai82], logique MSO liée à la largeur arborescente [KL03])
- Existence de **pavages** (problèmes de décidabilité [Mar08]), d'**automates cellulaires** universels [HM03])

Idee : les graphes de Cayley planaires localement finis (et leurs plongements) sont plus appropriés pour résoudre ces problèmes.

Exemple : un problème de localisation

Soit Γ un graphe de Cayley localement fini.

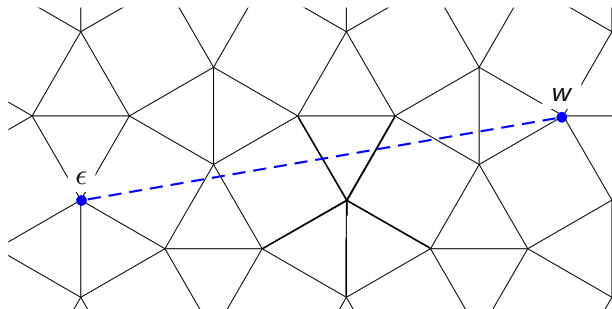
Soit w un point du plan. Comment décider si w est un sommet du graphe ?



Exemple : un problème de localisation

Soit Γ un graphe de Cayley **planaire** localement fini.

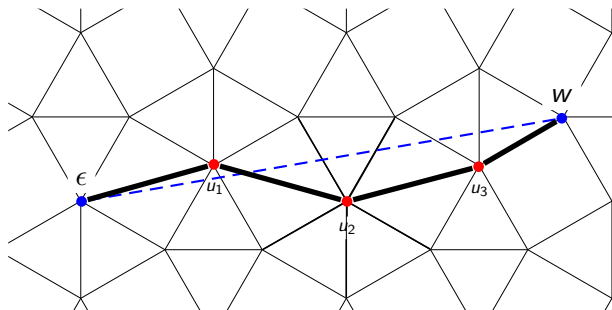
Soit w un point du plan. Comment décider si w est un sommet du graphe ?



Exemple : un problème de localisation

Soit Γ un graphe de Cayley **planaire** localement fini.

Soit w un point du plan. Comment décider si w est un sommet du graphe ?



Dans cet exposé ...

Soit G un groupe d'isométries du plan hyperbolique. Supposons vouloir construire des graphes de Cayley planaires localement finis pour G .

- Comment savoir si G est un groupe fuchsien ?
(problème de la discrétude)
- Combien G , s'il est fuchsien, possède t'il de graphes de Cayley planaires localement finis ?
- Comment, dans ce dernier cas, construire ces graphes de Cayley ?
(lié au problème du mot généralisé)

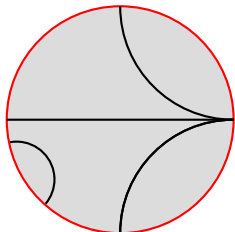
- 1 Géométrie du plan hyperbolique
- 2 Nombre de graphes de Cayley planaires
- 3 Construction de graphes de Cayley planaires

Généralités sur le plan hyperbolique

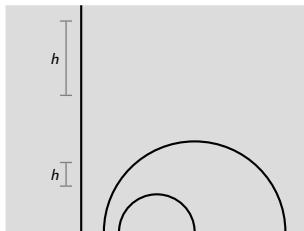
Définition : Plan hyperbolique

Le *plan hyperbolique* peut être défini de deux manières :

- la boule unité $B(0, 1)$ munie de la distance locale $ds = \frac{|dz|}{\sqrt{1-|z|^2}}$.
- le demi-plan supérieur muni de la distance locale $ds = \frac{|dz|}{|\Im(z)|}$



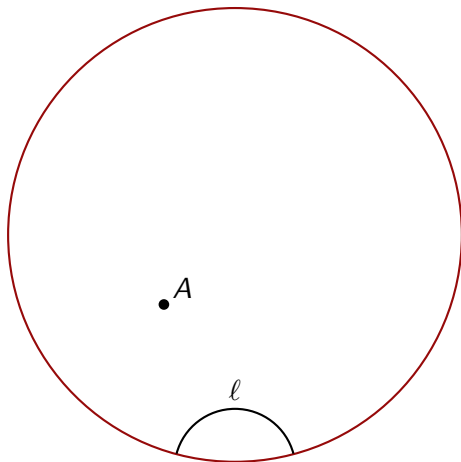
Modèle de Poincaré



Modèle du demi-plan

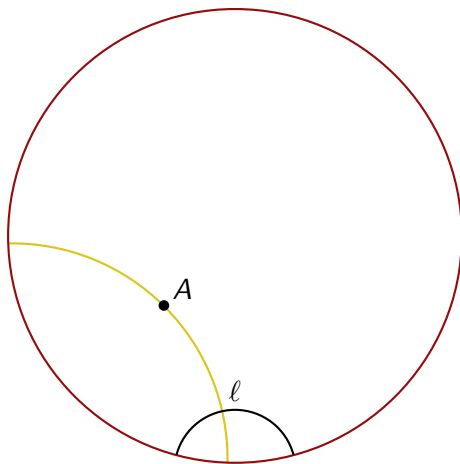
Exemples de constructions géométriques

Dans le modèle de Poincaré : un point A et une droite ℓ



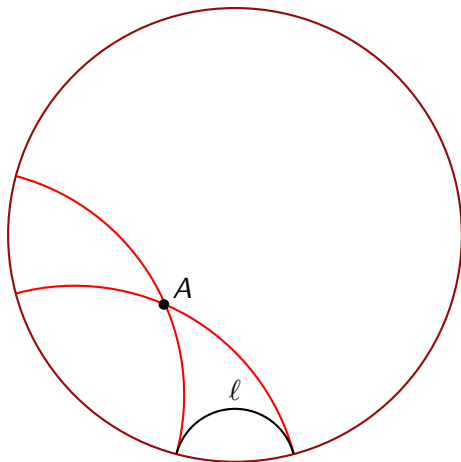
Exemples de constructions géométriques

Dans le modèle de Poincaré : une sécante à ℓ passant par A



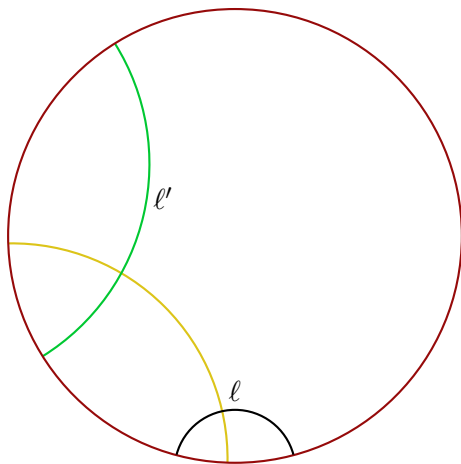
Exemples de constructions géométriques

Dans le modèle de Poincaré : les deux parallèles à ℓ passant par A



Exemples de constructions géométriques

Dans le modèle de Poincaré : la perpendiculaire aux droites ℓ et ℓ'



Isométries hyperboliques

Isométries hyperboliques

Les isométries du plan hyperboliques (modèle du demi-plan) sont les homographies de la forme :

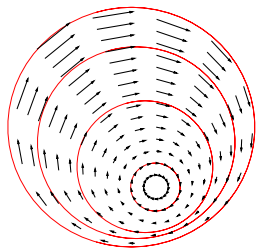
$$z \rightarrow \frac{az + b}{cz + d} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (a, b, c, d) \in \mathbb{R} \\ \text{et } ad - bc = \pm 1 \end{cases}$$

Conséquences :

- Toute isométrie hyperbolique se représente par une matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.
- La loi de composition des isométries correspond au produit matriciel.
- Le groupe des isométries hyperboliques est isomorphe à $PSL_2(\mathbb{R})$.

Types d'isométries hyperboliques

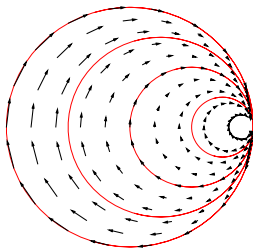
Classification faite selon les points fixes de l'isométrie :



Elliptique

$$|Tr(M)| < 2$$

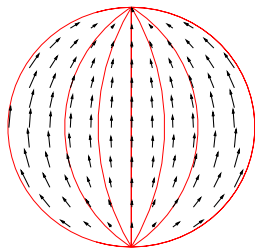
$$M \approx \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$



Parabolique

$$|Tr(M)| = 2$$

$$M \approx \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Hyperbolique

$$|Tr(M)| > 2$$

$$M \approx \begin{bmatrix} \sqrt{\mu} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\mu}} \end{bmatrix}$$

Calculs autorisés

Pour écrire des algorithmes sur des groupes d'isométries du plan hyperbolique, on s'autorise à :

- Composer un nombre fini d'isométries entre elles
- Calculer l'image d'un point par une isométrie
- Déterminer le type d'une isométrie (elliptique, parabolique, hyperbolique)
- Déterminer l'ordre d'une isométrie (dans $\mathbb{Z} \cup \{\infty\}$)

Problème : il faut faire attention au modèle de calcul utilisé

Par exemple, les **machines BSS** [BCSS98] ou la théorie de la **computable analysis** [PER89], non équivalentes.

- 1 Géométrie du plan hyperbolique
- 2 Nombre de graphes de Cayley planaires**
- 3 Construction de graphes de Cayley planaires

Caractéristique d'un groupe fuchsien

Equation diophantienne

L'équation diophantienne $E(\Delta, d)$:

$$E(\Delta, d) : \sum_{i=1}^d \frac{1}{k_i} = \Delta \quad \text{where} \quad \begin{cases} d \in \mathbb{N}, \Delta \in \mathbb{Q}, \Delta > 0 \\ \forall i, k_i \in \mathbb{N} \text{ and } k_i \geq 3 \end{cases}$$

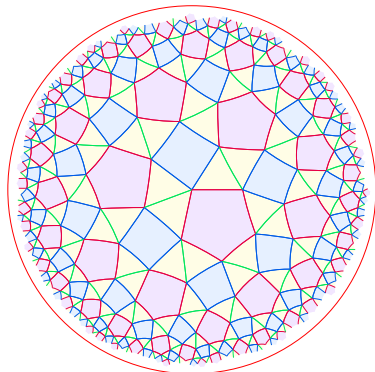
a un nombre fini de solutions $[k_1; \dots; k_d]$.

Lié au problème des fractions égyptiennes [BBC69].

Soit G un groupe fuchsien, et Γ un graphe de Cayley planaire localement fini de G . Les tailles des faces de Γ sont notées $[k_1; \dots; k_d]$.

Définition : Caractéristique d'un graphe de Cayley

La caractéristique de Γ est le nombre $\Delta = \sum_{i=1}^d \frac{k_i - 2}{k_i}$



Vecteur de face : $[3; 4; 3; 3; 5]$

$$\Delta = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{3}{5} = \frac{21}{10}$$

Lemme

Pour un groupe G donné, tout graphe de Cayley planaire Γ de G possède la même caractéristique Δ .

Preuve : par construction d'une surface quotient sur laquelle G agit et comptage des éléments de Γ dans ce quotient.

Corollaire

Le nombre de graphes de Cayley planaires localement finis associés à un groupe G est fini.

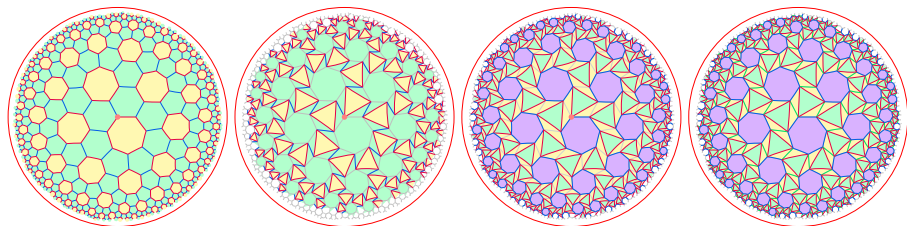
Preuve :
$$\forall k_i \geq 3, \quad \frac{1}{3} \leq \frac{k_i - 2}{k_i} \leq 1$$

Donc, à Δ fixé, le degré maximal du graphe est fixé par $\lceil 3\Delta \rceil$.

Exemple : $\Delta = \frac{43}{21}$

- Il s'agit de la valeur de Δ la plus faible pour que le groupe agisse sur le plan hyperbolique.
- L'énumération des vecteurs solutions fournit la liste suivante :

$$\left\{ [3; 8; 56]; [3; 14; 14]; [4; 7; 12]; [6; 6; 7]; [3; 3; 6; 7]; [3; 4; 4; 7]; [3; 3; 3; 3; 7] \right\}$$



- 1 Géométrie du plan hyperbolique
- 2 Nombre de graphes de Cayley planaires
- 3 Construction de graphes de Cayley planaires**

Soit G un groupe fuchsien finiment engendré par $S = \{h_1, \dots, h_n\}$.
Comment construire un graphe de Cayley planaire pour G ?

Deux types de problèmes :

- il est possible de ne pas savoir si le groupe est discret ou pas (problème de la discrétude)
- il est possible que les générateurs de S n'engendrent pas un graphe de Cayley planaire (problème du mot généralisé à travers la construction d'un graphe de Cayley planaire)

Le problème de la discrétude

Décidabilité de la discrétude [Ros86, Gil95]

Soient g et h deux isométries hyperboliques.

Il existe une procédure permettant de déterminer, en un nombre fini d'étapes, si le groupe engendré par g et h est un groupe discret d'isométries ou non.

Remarques :

- le résultat s'étend à un groupe finiment engendré [Jø76]
- la procédure génère des graphes de Cayley planaires (à travers le théorème du polygone de Poincaré)

Le problème de la discrétude

Basé en fait sur le théorème de caractérisation suivant :

Théorème de caractérisation des groupes d'isométries discrets [Ros86]

Un groupe d'isométries discret G engendré par les générateurs a et b peut prendre une seule des formes suivantes :

1. $G = \langle a, b \mid \rangle$ (groupe libre)
2. $G = \langle a, b \mid a^p = \epsilon \rangle$ (pour $p \geq 2$)
3. $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = \epsilon \rangle$ (pour $q \geq p \geq 2$, et $p + q \geq 5$)
4. $G = \langle a, b \mid a^p = b^q = (ab)^r = \epsilon \rangle$ (pour $r \geq q \geq p \geq 2$, et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1$)
5. $G = \langle a, b \mid [a, b]^p = \epsilon \rangle$ (pour $p \geq 2$)
6. $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = (abc)^p = \epsilon \rangle$ (pour p impair et ≥ 3)

- Travail de longue haleine :
[Kna68, Pur72b, Pur72a, PR72, Ros72, Pur76, Mat82]

Le problème du mot généralisé

Soit G un groupe fuchsien :

Problème du mot généralisé (GWP)

Étant donné un sous-groupe H engendré par un nombre fini de générateurs $\{h_1, \dots, h_n\}$, et un mot $u \in G$ sur les générateurs de G , l'élément u appartient-il ou non au sous-groupe H ?

- Le GWP est indécidable dans le cas général.

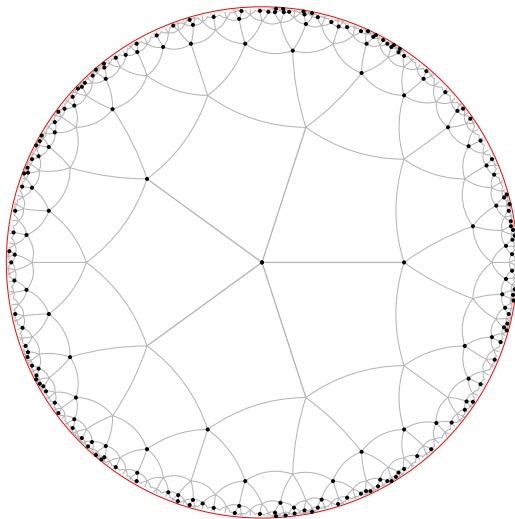
Décidabilité du GWP

Le problème du mot généralisé est décidable sur les groupes fuchiens.

- Ils ont la propriété “locally extended residually finite” [Sco78, Sco85]
- Résoudre le problème peut se faire en construisant un graphe de Cayley planaire localement fini pour G

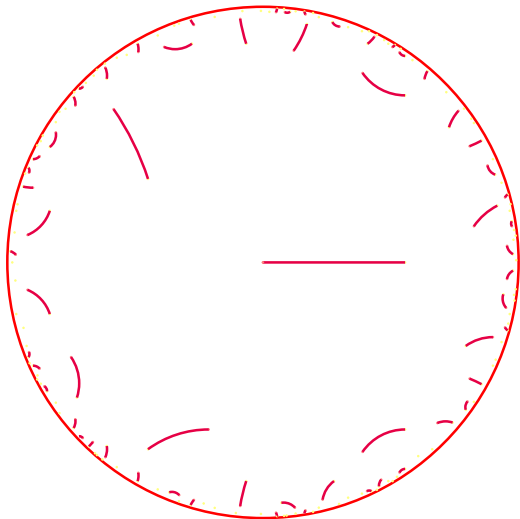
Stratégie n°1 : le groupe G est entièrement connu

Ajouter les générateurs un à un :



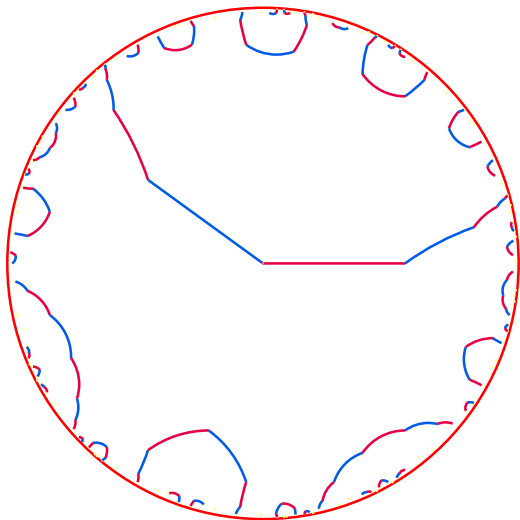
Stratégie n°1 : le groupe G est entièrement connu

Ajouter les générateurs un à un : a_1



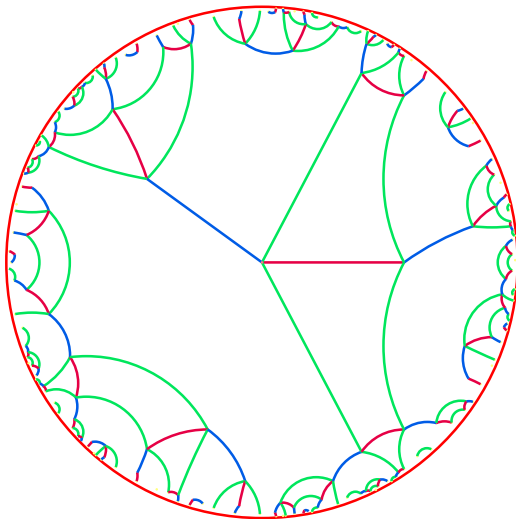
Stratégie n°1 : le groupe G est entièrement connu

Ajouter les générateurs un à un : a_1, a_3



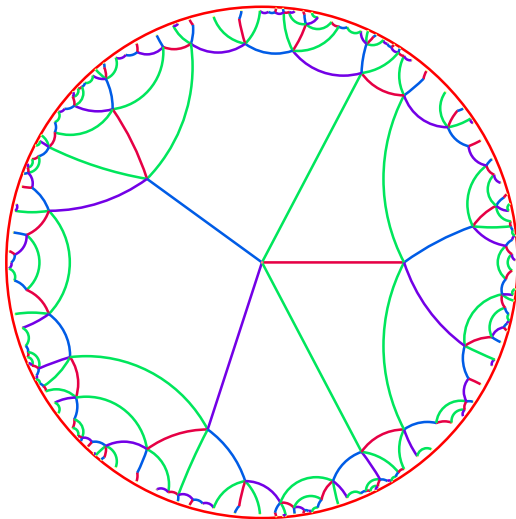
Stratégie n°1 : le groupe G est entièrement connu

Ajouter les générateurs un à un : a_1, a_3, a_2a_5



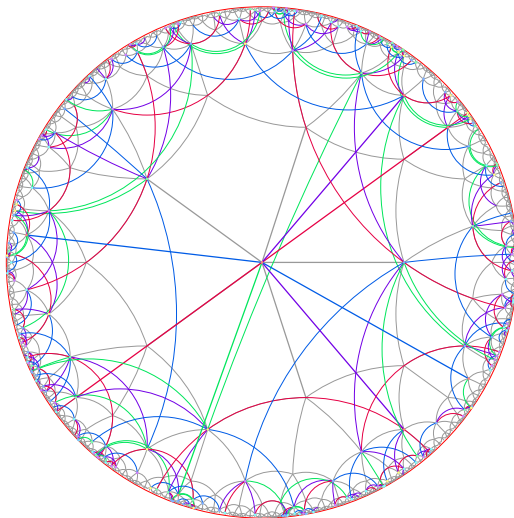
Stratégie n°1 : le groupe G est entièrement connu

Ajouter les générateurs un à un : a_1, a_3, a_2a_5, a_4a_5



Stratégie n°2 : le groupe G doit être exploré

Problème si le graphe n'est pas initialement planaire :



Plusieurs problèmes entrent en jeu :

- comment décrire le graphe ?
- comment s'assurer s'il est planaire ?
- s'il ne l'est pas, comment modifier les générateurs pour arriver à éliminer les croisements entre les arêtes ?

Décrire un graphe de Cayley planaire

Soit Γ un graphe de Cayley avec ensemble de générateurs S .

Définition : Schéma d'étiquetage

Un *schéma d'étiquetage* pour Γ est un tuple (p, σ, τ) tel que :

- p est une permutation cyclique on S dont le cycle décrit l'ordre d'apparition des générateurs étiquetant les arêtes incidentes à un sommet du graphe.
- σ est une involution sur S telle que $\sigma(x) = x^{-1}$.
- $\tau : S \rightarrow \{-1; 1\}$ est telle que $\tau(x) = 1$ ssi x est une isométrie directe.

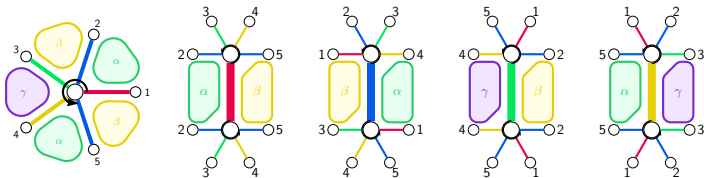
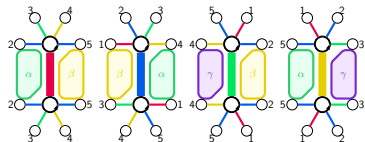
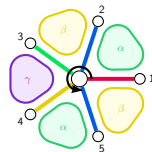
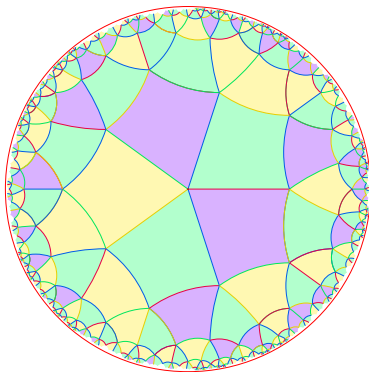


Schéma d'étiquetage

Reconstruction

Étant donné un schéma d'étiquetage et un vecteur de type décrivant les tailles des faces incidentes au sommet origine, il est possible de construire le graphe Γ possédant ce schéma d'étiquetage et ces tailles de faces.



Stratégie n°2 bis

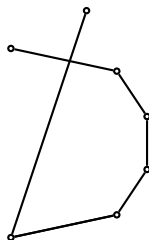
Donnée initiale : un graphe de Cayley planaire localement fini pour G , et un ensemble de générateurs $S = \{h_1, \dots, h_n\}$ pour H .

Algorithme

Tant que $\Gamma[S]$ n'est pas planaire

- Chercher deux arêtes qui se croisent dans $\Gamma[S]$.
- Modifier les générateurs dans S pour que :
 - ils soient plus courts (globalement)
 - ils engendrent toujours H
 - ils évitent le croisement précédent
- Recommencer

Avec un schéma d'étiquetage, il est possible de construire le pseudo-bord d'une face. Imaginons pouvoir trouver ainsi deux arêtes qui se croisent.



Les deux arêtes forment les diagonales d'un quadrilatère convexe.

Comment éviter les croisements d'arêtes ?

Lemme des diagonales

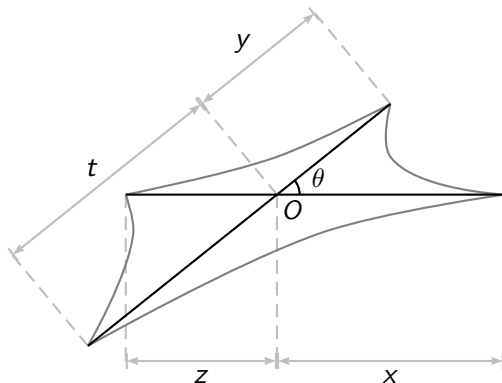
Soit $(ABCD)$ un quadrilatère convexe dessiné dans le plan. Nommons $L \geq l$ les longueurs de ses deux diagonales. Alors les deux propriétés suivantes sont vraies :

- (i) Si l'on considère deux côtés opposés du quadrilatère, alors au moins l'un des deux est de longueur $< L$.
- (ii) Si deux côtés consécutifs du quadrilatère sont strictement plus longs que L , alors les deux côtés restants sont $< l$.

En nombre fini ?

Définition : Facteur de réduction

$$q(x, y, z, t, \theta) = \frac{\min(l(x, y, \theta), l(z, t, \theta))}{\max(x + z, y + t)}$$



En nombre fini ?

Définition : Facteur de réduction

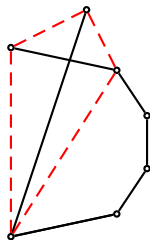
$$q(x, y, z, t, \theta) = \frac{\min(l(x, y, \theta), l(z, t, \theta))}{\max(x + z, y + t)}$$

Lemme de réduction

Supposons que L soit la longueur de la plus grande diagonale du quadrilatère, et l_{min} la longueur minimale d'un côté du quadrilatère. Alors la fonction q est bornée de la manière suivante :

$$q(x, y, z, t, \theta) \leq \frac{\operatorname{arccosh}\left(2 \cosh^2 \frac{L}{2} - \cosh l_{min}\right)}{L}$$

Pour chaque croisement, il suffit alors de remplacer l'une des deux arêtes incriminées dans le croisement par une arête plus courte.



Lemme

Le nombre de générateurs reste constant, mais leur longueur décroît à chaque étape, d'un facteur majoré par le facteur de réduction.

⇒ Complexité linéaire en le nombre de générateurs

Décidabilité de la planarité de Γ

Soit Γ un graphe de Cayley donné par schéma d'étiquetage.

Conséquence du théorème du polygone de Poincaré

Le graphe Γ est planaire si et seulement si les chemins que l'on obtient en suivant les bords des faces forment des polygones sans intersection.

- Procédure de décision relativement simple lorsque les faces sont finies.
- Lorsque les faces sont infinies, l'idée est alors de rajouter des générateurs au graphe de manière à ce que les faces infinies deviennent plus simples.

Conclusion

Actuellement, le travail consiste principalement à rassembler les pièces de l'algorithme.

- Calculer la complexité obtenue (en terme de nombre de générateurs calculés)
- Comparer cette complexité à celle obtenue par Gilman (qui est linéaire en la trace maximale des générateurs)
- Regarder le problème de la terminaison lorsque le groupe n'est pas fuchsien.

Et de manière plus ambitieuse :

- Vérifier si ce genre d'algorithme ne peut pas d'étendre à la construction de graphes de monoïdes.



A. Beck, M. Bleicher, and D. Crowe.

Excursions into mathematics.

Worth Publishers, 1969.



L. Blum, F. Cucker, M. Shub, and S. Smale.

Complexity and real computation.

Springer, 1998.



M. Dehn.

Transformation der Kurven auf zweiseitigen Flächen.

Mathematische Annalen, 72(3) :413–421, 1912.



H. Gaifman.

On local and non-local properties.

In J. Stern, editor, *Proceedings of the Herbrand symposium*, Logic Colloquium'81, pages 105–135, 1982.



J. Gilman.

Two-generator discrete subgroups of $PSL(2, R)$.

Number 561 in *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical Society, 1995.



F. Herrmann and M. Margenstern.

A universal cellular automaton in the hyperbolic plane.

Theoretical Computer Science, 296(2) :327–364, 2003.



T. Jørgensen.

On discrete groups of mobius transformations.

American Journal of Math., 98 :739–749, 1976.



D. Kuske and M. Lohrey.

Decidable theories of Cayley-graphs.

In *Proceedings of STACS 2003*, LNCS 2607, pages 463–474, 2003.



A. W. Knap.

Doubly generated fuchsian groups.

Michigan Math. Journal, 15 :289–304, 1968.



M. Margenstern.

The domino problem of the hyperbolic plane is undecidable.
Theoretical Computer Science, 407 :29–84, 2008.



J. P. Matelski.

The classification of discrete 2-generator subgroups of $psl(2, r)$.
Israel Journal of Mathematics, 42 :309–317, 1982.



Marian B. Pour-El and J. Ian Richards.

Computability in analysis and physics, volume 1 of *Perspectives in Mathematical Logic*.
Springer-Verlag, 1989.
"http://projecteuclid.org/euclid.pl/1235422916" (Last access : 28 mai 2010).



N. Purzitsky and G. Rosenberger.

Two generator fuchsian groups of genus one.
Mathematische Zeitschrift, 128 :245–251, 1972.
Correction : *Mathematische Zeitschrift* 132, 261–262 (1973).



N. Purzitsky.

Real two-dimensional representations of two-generator free groups.
Mathematische Zeitschrift, 127 :95–104, 1972.



N. Purzitsky.

Two generator discrete free groups.
Mathematische Zeitschrift, 127 :209–223, 1972.



N. Purzitsky.

All two-generator fuchsian groups.
Mathematische Zeitschrift, 147 :87–92, 1976.



G. Rosenberger.

Fuchsische gruppen, die freies produkt zweier zyklischer gruppen sind, une die gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = xyz$.
Mathematische Annalen, 199 :213–228, 1972.



G. Rosenberger.

All generating pairs of all two-generators fuchsian groups.

Arch Math, 46 :198–204, 1986.



P. Scott.

Subgroups of surface groups are almost geometric.

Journal of the London Mathematical Society, 17 :555–565, 1978.



P. Scott.

Correction to 'Subgroups of surface groups are almost geometric'.

Journal of the London Mathematical Society, 32 :217–220, 1985.