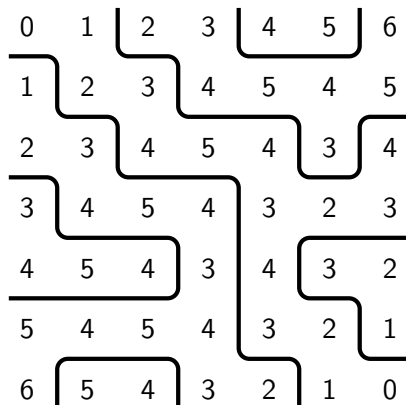
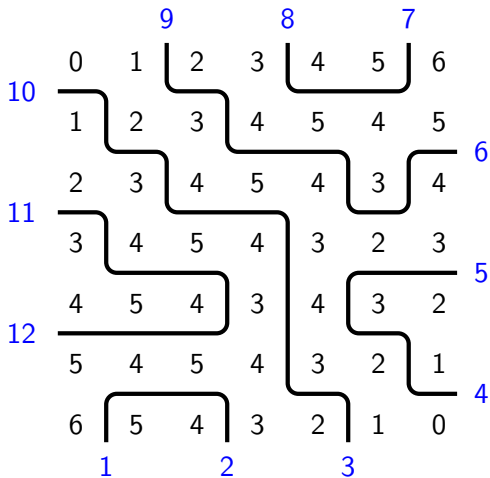


Personnage principal



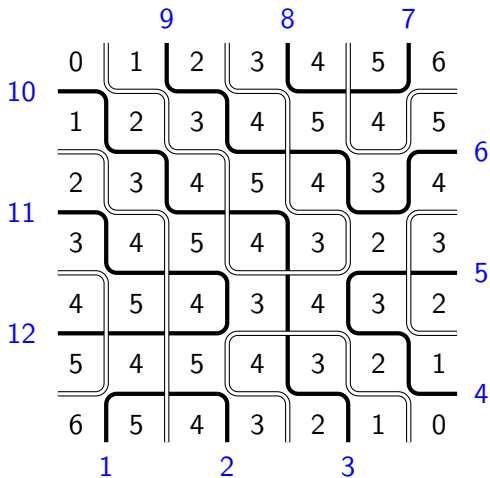
Personnage principal



Couplage π :

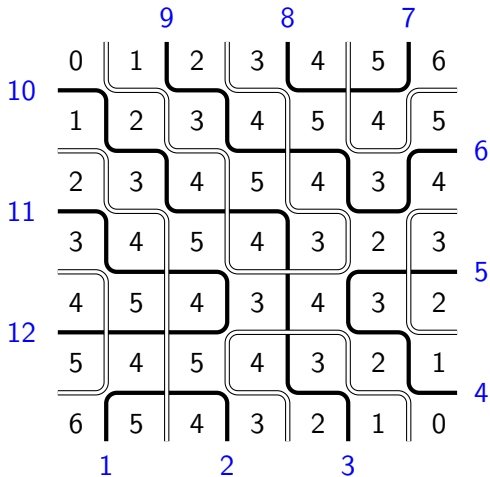
- (1 - 2)
- (3 - 10)
- (4 - 5)
- (6 - 9)
- (7 - 8)
- (11 - 12)

Personnage principal



Ne jamais oublier
l'autre moitié du
monde !

Personnage principal



Couplages π_{\bullet} et π_{\circ} :

- $(1 - 2) (1 - 10)$
- $(3 - 10) (2 - 3)$
- $(4 - 5) (4 - 5)$
- $(6 - 9) (6 - 7)$
- $(7 - 8) (8 - 9)$
- $(11 - 12) (11 - 12)$

Giration

GIRATION, subst. fém.

Mouvement circulaire autour d'un axe ou d'un centre fixe. Giration de toupie, de manège ; giration de l'eau ; sens, rayon, cercle de giration.

Gaston Doumergue est jeune comme est blanc le disque aux sept nuances du prisme, à qui la giration restitue la candeur
(COLETTE, Belles sais., Cahiers, 1935, p. 184).

Sens giratoire. Sens imposé aux automobilistes autour d'un obstacle à contourner, d'un rond-point.

Benjamin Wieland

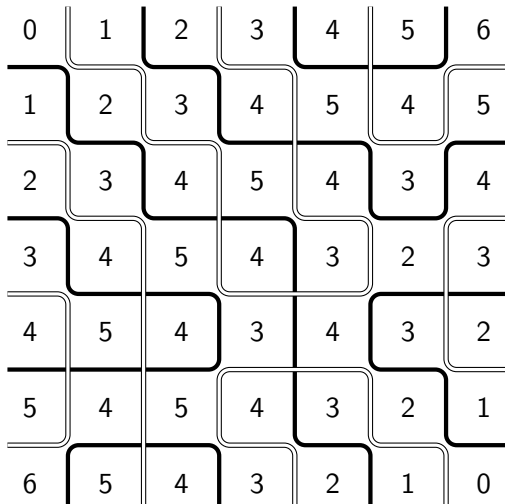
A Large Dihedral Symmetry of the Set of Alternating Sign Matrices

June 30, 2000

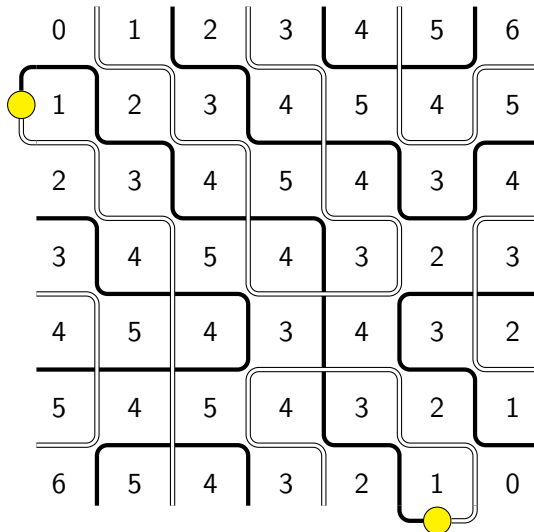
Est-ce lui? Ben Wieland comes to *Brown* from the University of Chicago, where he received his doctorate in mathematics this last June [2006]. His thesis was titled *Pullback Conjectures for the Stable Automorphism Groups of Free Groups*.

As a 2000 Phi Beta Kappa graduate from the Massachusetts Institute of Technology, Wieland received the Jon A. Bucsela Prize in mathematics. That award is given in recognition of distinguished scholastic achievement, professional promise and enthusiasm for mathematics. In 2000, Wieland interned with the theory group of Microsoft Research. While an MIT undergraduate, he participated in the National Science Foundation's Research Experience for Undergraduates, and in MIT's Undergraduate Research Opportunities Program, working in the tiling group and on toric geometry.

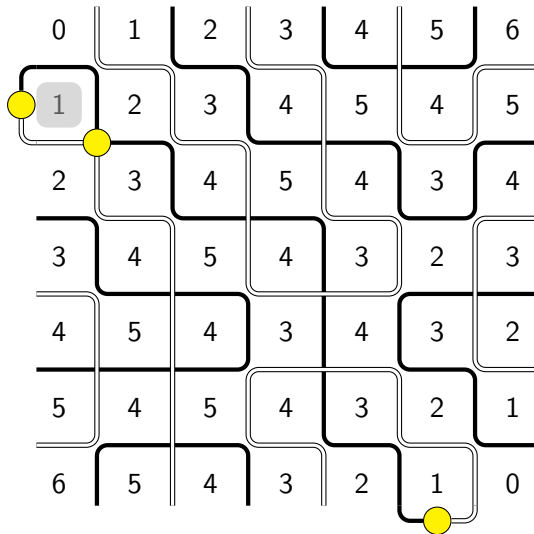
Chemins consécutifs



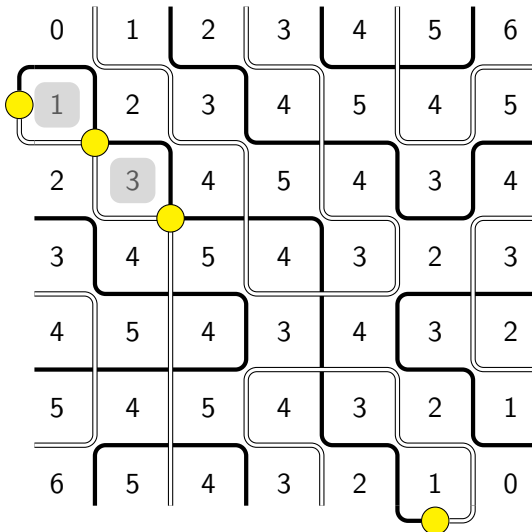
Chemins consécutifs



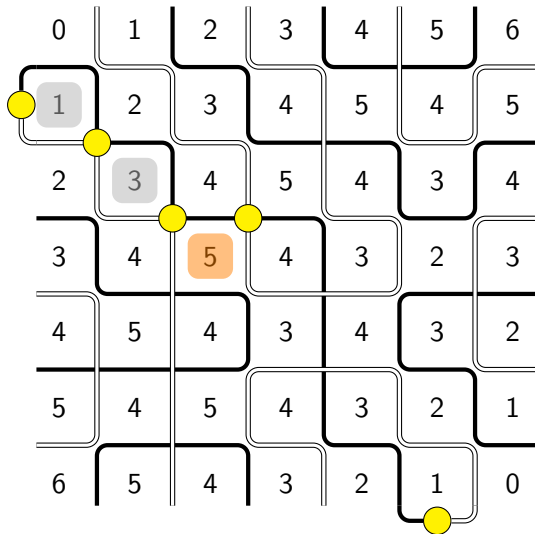
Chemins consécutifs



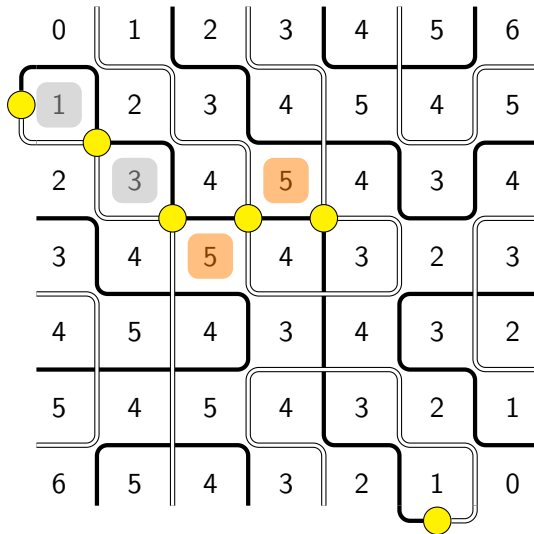
Chemins consécutifs



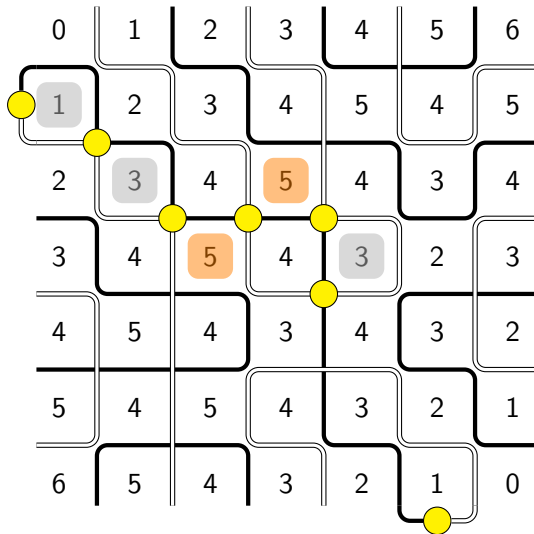
Chemins consécutifs



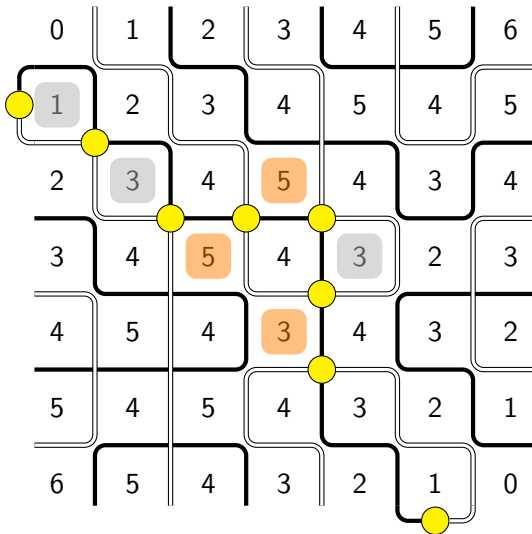
Chemins consécutifs



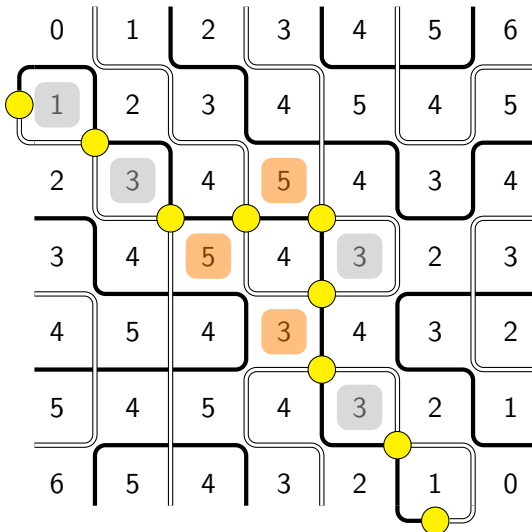
Chemins consécutifs



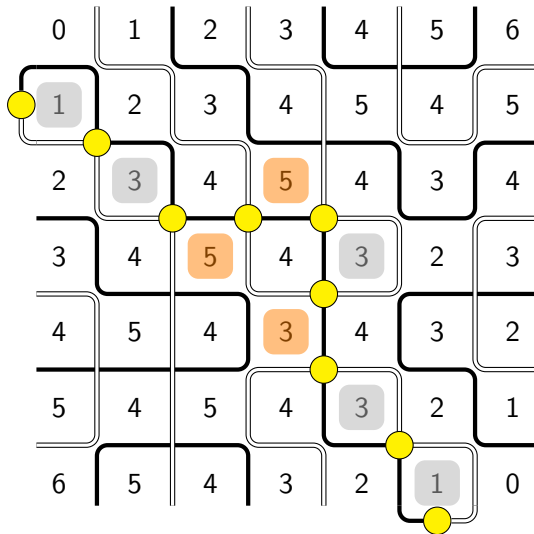
Chemins consécutifs



Chemins consécutifs



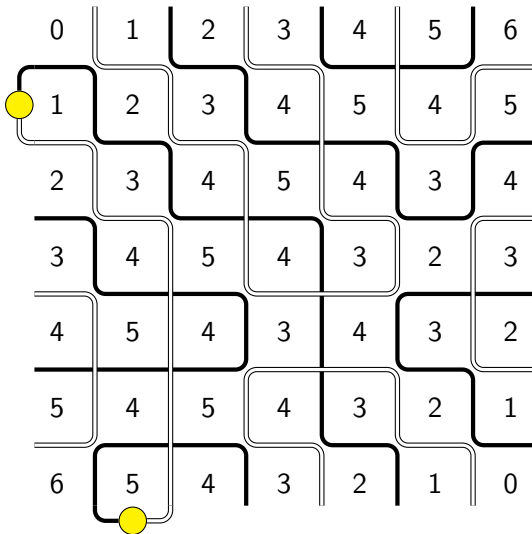
Chemins consécutifs



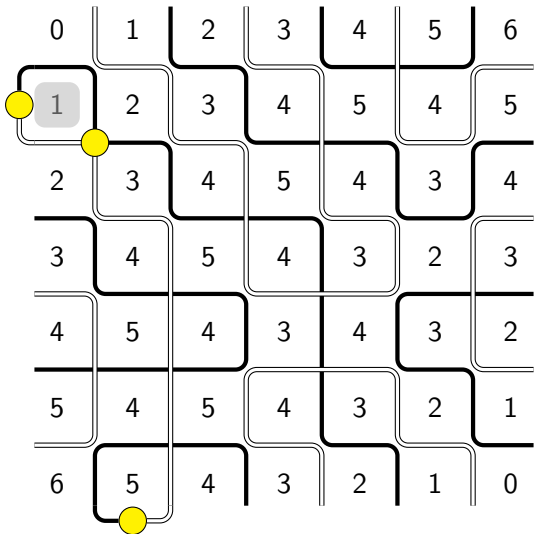
Ou bien...

0	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	4	5
2	3	4	5	4	3	4
3	4	5	4	3	2	3
4	5	4	3	4	3	2
5	4	5	4	3	2	1
6	5	4	3	2	1	0

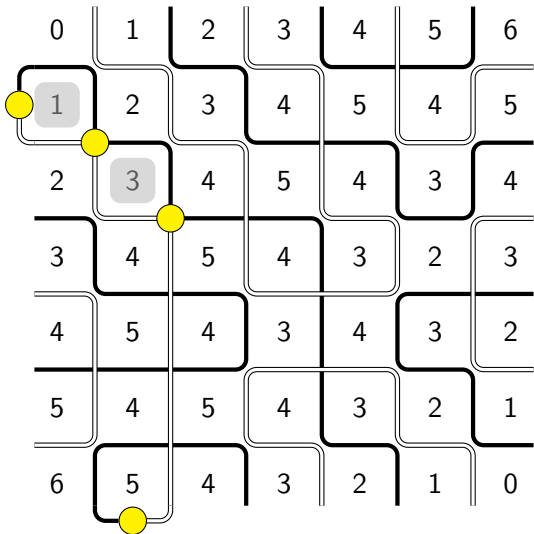
Ou bien...



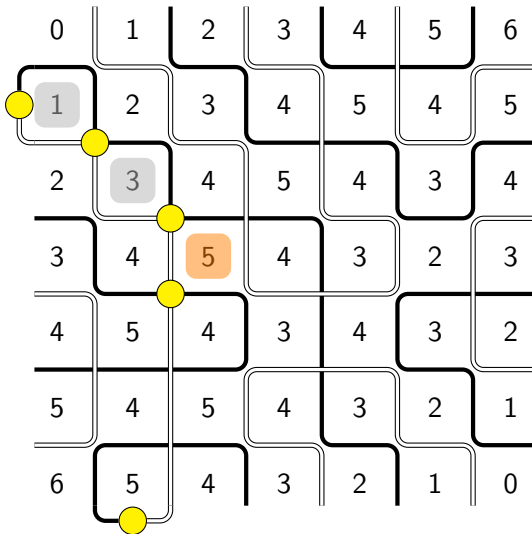
Ou bien...



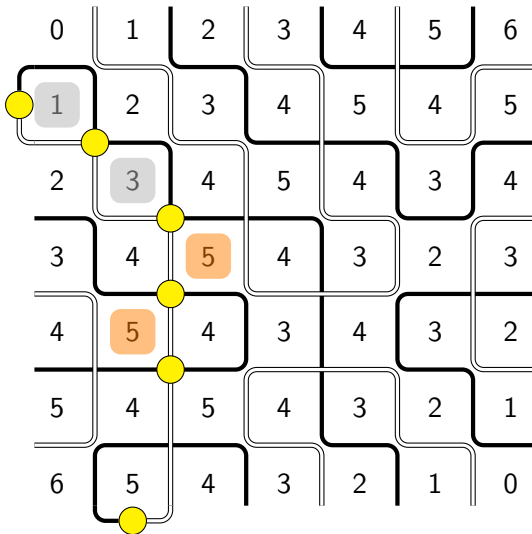
Ou bien...



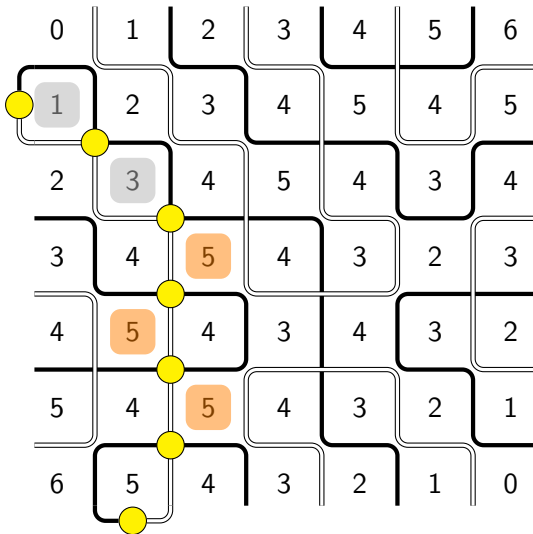
Ou bien...



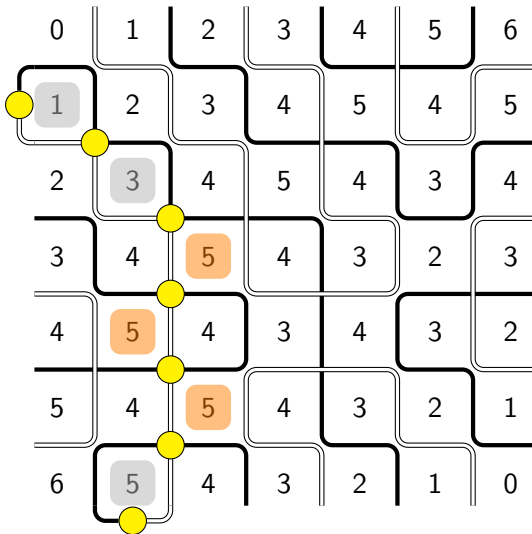
Ou bien...



Ou bien...

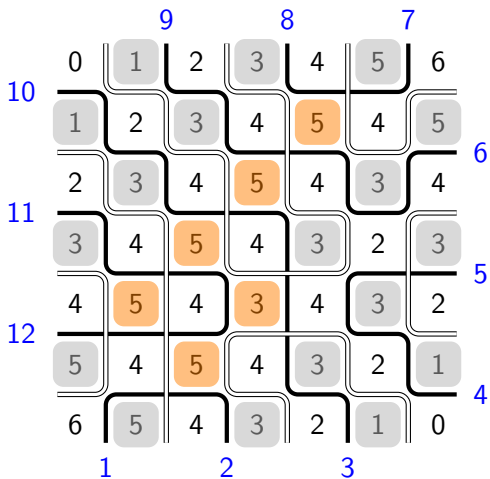


Ou bien...



Opérateur H_+

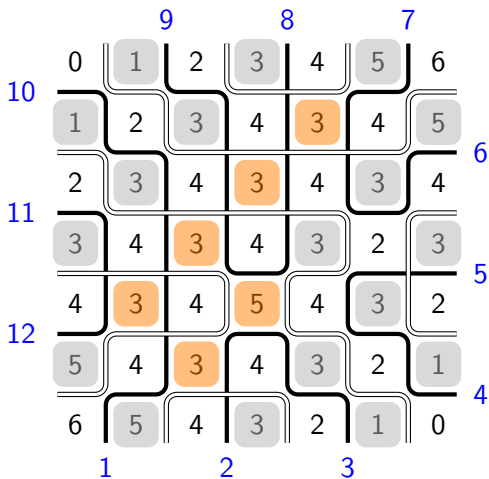
Echange les couplages noir et blanc
(damier *impair*) :



- $(1 - 2) (1 - 10)$
- $(3 - 10) (2 - 3)$
- $(4 - 5) (4 - 5)$
- $(6 - 9) (6 - 7)$
- $(7 - 8) (8 - 9)$
- $(11 - 12) (11 - 12)$

Opérateur H_+

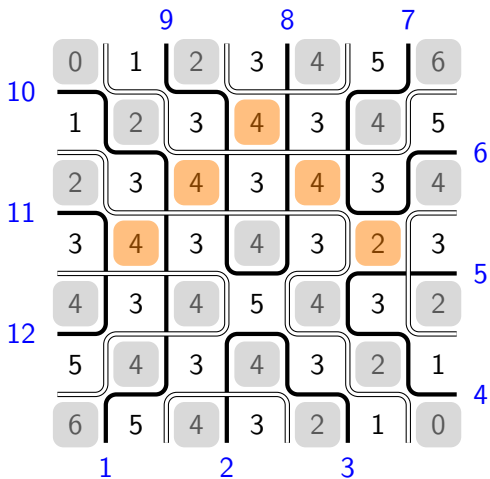
Echange les couplages noir et blanc
(damier *impair*) :



- $(1 - 2) (1 - 10)$
 - $(3 - 10) (2 - 3)$
 - $(4 - 5) (4 - 5)$
 - $(6 - 9) (6 - 7)$
 - $(7 - 8) (8 - 9)$
 - $(11 - 12) (11 - 12)$
-
- $(1 - 10) (1 - 2)$
 - $(2 - 3) (3 - 10)$
 - $(4 - 5) (4 - 5)$
 - $(6 - 7) (6 - 9)$
 - $(8 - 9) (7 - 8)$
 - $(11 - 12) (11 - 12)$

Opérateur H_-

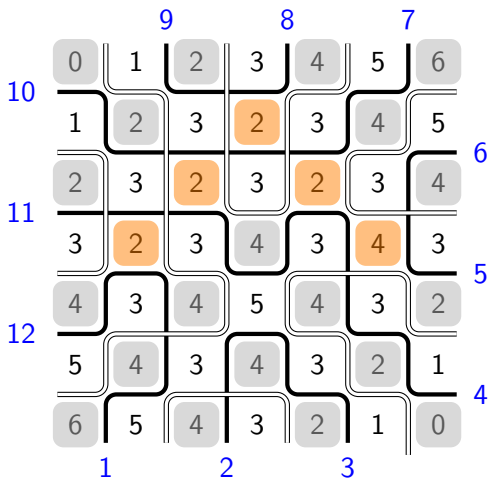
Echange les couplages noir et blanc décalés
(damier pair) :



- $(1 - 10) (1 - 2)$
- $(2 - 3) (3 - 10)$
- $(4 - 5) (4 - 5)$
- $(6 - 7) (6 - 9)$
- $(8 - 9) (7 - 8)$
- $(11 - 12) (11 - 12)$

Opérateur H_-

Echange les couplages noir et blanc décalés
(damier pair) :



- $(1 - 10)$ $(1 - 2)$
 - $(2 - 3)$ $(3 - 10)$
 - $(4 - 5)$ $(4 - 5)$
 - $(6 - 7)$ $(6 - 9)$
 - $(8 - 9)$ $(7 - 8)$
 - $(11 - 12)$ $(11 - 12)$
-
- $(1 - 12)$ $(1 - 2)$
 - $(2 - 3)$ $(3 - 4)$
 - $(4 - 11)$ $(5 - 6)$
 - $(5 - 6)$ $(7 - 8)$
 - $(7 - 10)$ $(9 - 12)$
 - $(8 - 9)$ $(10 - 11)$

Giration

- H_+ et H_- sont des involutions qui, appliquées à un FPL Φ , échangent ses couplages noir et blanc.

Giration

- H_+ et H_- sont des involutions qui, appliquées à un FPL Φ , échangent ses couplages noir et blanc.
- H_+ apparie chaque brin noir avec le brin blanc *suivant*, tandis que H_- apparie chaque brin noir avec le brin blanc *précédent*.

Giration

- H_+ et H_- sont des involutions qui, appliquées à un FPL Φ , échangent ses couplages noir et blanc.
- H_+ apparie chaque brin noir avec le brin blanc *suivant*, tandis que H_- apparie chaque brin noir avec le brin blanc *précédent*.
- La bijection $G = H_- H_+$ applique la rotation R au couplage noir et la rotation R^{-1} au couplage blanc.

Giration

- H_+ et H_- sont des involutions qui, appliquées à un FPL Φ , échanent ses couplages noir et blanc.
- H_+ apparie chaque brin noir avec le brin blanc *suivant*, tandis que H_- apparie chaque brin noir avec le brin blanc *précédent*.
- La bijection $G = H_- H_+$ applique la rotation R au couplage noir et la rotation R^{-1} au couplage blanc.
- Plus exactement, en projetant les FPL sur leurs couplages noirs (resp. blancs), G relève R (resp. R^{-1}) :

$$\begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{G} & \Phi' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{\bullet} & \xrightarrow{R} & \pi'_{\bullet} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Phi & \xrightarrow{G} & \Phi' \\ \downarrow & & \downarrow \\ \pi_{\circ} & \xleftarrow{R} & \pi'_{\circ} \end{array}$$

Nouvelle giration : objectif

- Puisque $Re_1 = e_2R$, G est une bijection telle que :

$$Re_1 |\pi\rangle = e_2 |\pi'\rangle \quad (*)$$

en désignant par π et π' les couplages (noirs) associés aux FPL Φ et $\Phi' = G\Phi$.

Nouvelle giration : objectif

- Puisque $Re_1 = e_2R$, G est une bijection telle que :

$$Re_1 |\pi\rangle = e_2 |\pi'\rangle \quad (*)$$

en désignant par π et π' les couplages (noirs) associés aux FPL Φ et $\Phi' = G\Phi$.

- Une (légère) modification de l'algorithme de Wieland remplace la giration G par une *nouvelle giration* J qui vérifie la relation $(*)$ et conserve le type du brin (noir) numéro 2.

Nouvelle giration : objectif

- Puisque $Re_1 = e_2R$, G est une bijection telle que :

$$Re_1 |\pi\rangle = e_2 |\pi'\rangle \quad (*)$$

en désignant par π et π' les couplages (noirs) associés aux FPL Φ et $\Phi' = G\Phi$.

- Une (légère) modification de l'algorithme de Wieland remplace la giration G par une *nouvelle giration* J qui vérifie la relation $(*)$ et conserve le type du brin (noir) numéro 2.
- La relation $(*)$, qui peut s'écrire aussi $e_2R\pi = e_2\pi'$, est un *assouplissement* de la relation $R\pi = \pi'$ (elle possède plus de solutions).

Nouvelle giration : objectif

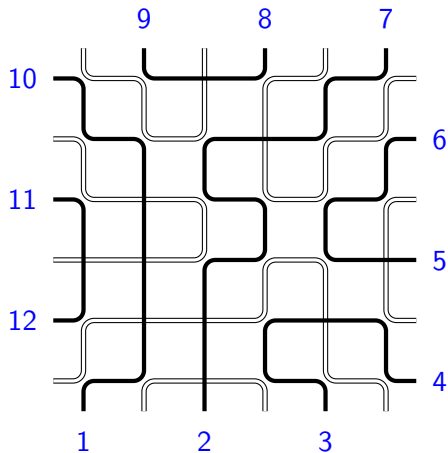
- Puisque $Re_1 = e_2R$, G est une bijection telle que :

$$Re_1 |\pi\rangle = e_2 |\pi'\rangle \quad (*)$$

en désignant par π et π' les couplages (noirs) associés aux FPL Φ et $\Phi' = G\Phi$.

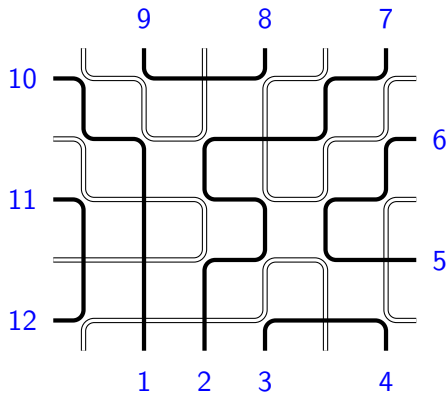
- Une (légère) modification de l'algorithme de Wieland remplace la giration G par une *nouvelle giration* J qui vérifie la relation $(*)$ et conserve le type du brin (noir) numéro 2.
- La relation $(*)$, qui peut s'écrire aussi $e_2R\pi = e_2\pi'$, est un *assouplissement* de la relation $R\pi = \pi'$ (elle possède plus de solutions).
- Bien entendu on peut remplacer les indices 1 et 2 par n'importe quelle paire d'indices consécutifs i et $i + 1$.

Nouvelle giration (type c) : algorithme



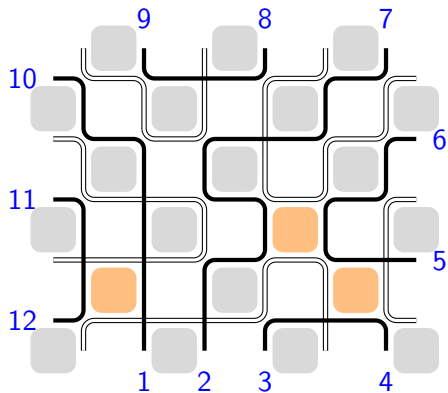
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.

Nouvelle giration (type c) : algorithme



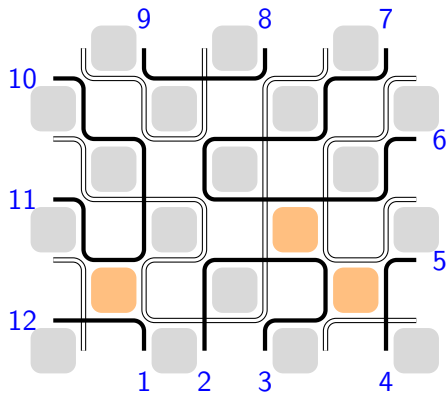
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.
- Appliquer l'algorithme de Wieland à ce FPL perturbé!

Nouvelle giration (type c) : algorithme



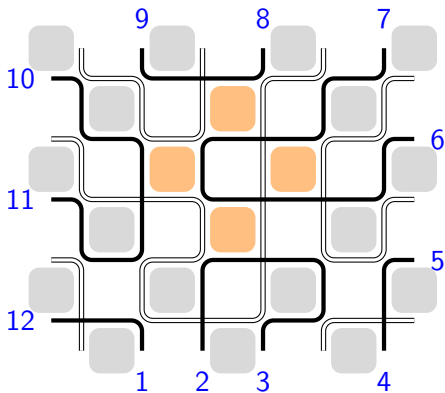
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.
- Appliquer l'algorithme de Wieland à ce FPL perturbé!
- D'abord J_+ ...

Nouvelle giration (type c) : algorithme



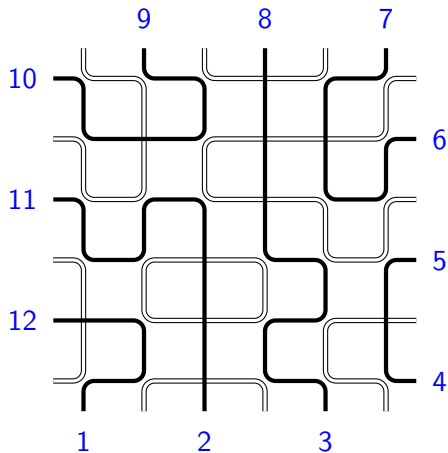
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.
- Appliquer l'algorithme de Wieland à ce FPL perturbé!
- D'abord J_+ ... c'est fait.

Nouvelle giration (type c) : algorithme



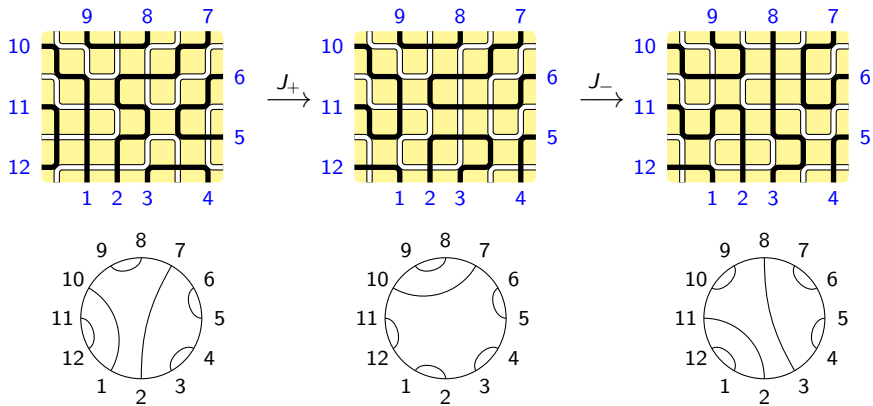
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.
- Appliquer l'algorithme de Wieland à ce FPL perturbé!
- D'abord J_+ ... c'est fait.
- Puis J_- ...

Nouvelle giration (type c) : algorithme



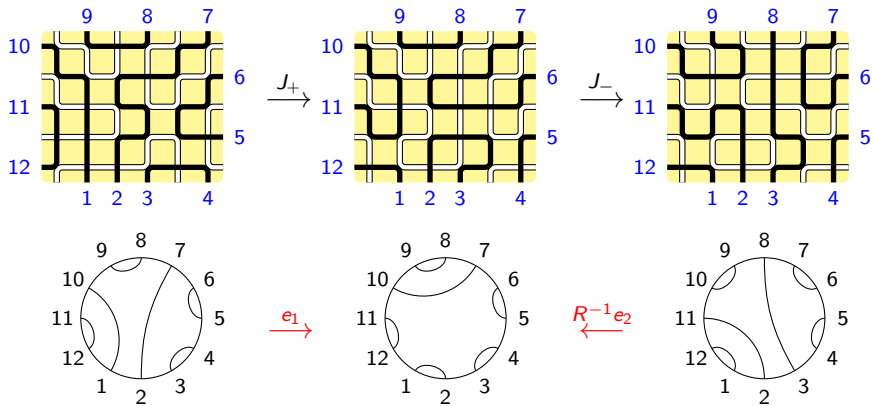
- Supprimer la ligne du bas (gelée). L'arche blanche qui relie les brins 1 et 2 disparaît.
- Appliquer l'algorithme de Wieland à ce FPL perturbé!
- D'abord J_+ ... c'est fait.
- Puis J_- ...
- Il ne reste qu'à rétablir la ligne gelée.

Couplages



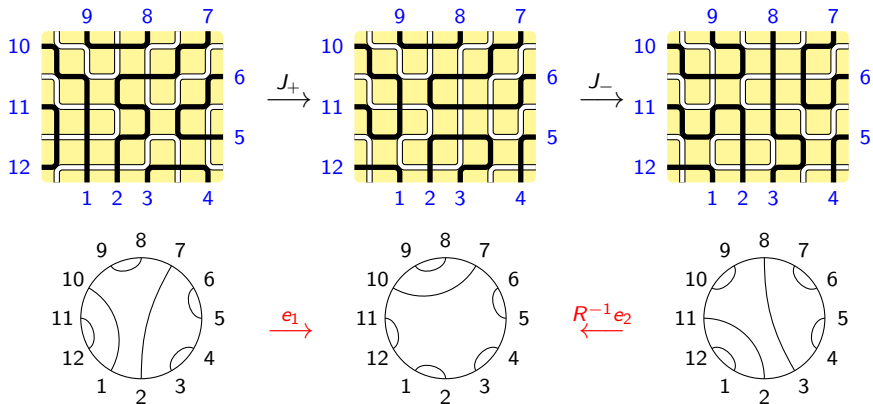
- Le couplage du centre est le couplage *blanc* (l'arche 1–2 est gelée).

Couplages



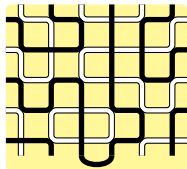
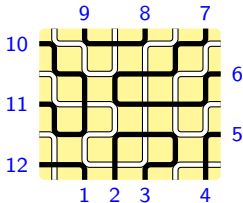
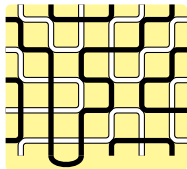
- Le couplage du centre est le couplage *blanc* (l'arche 1–2 est gelée).
- **Miracle italien !**

Couplages



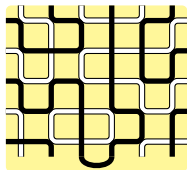
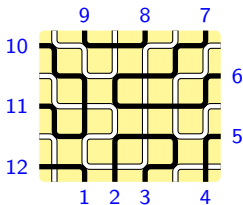
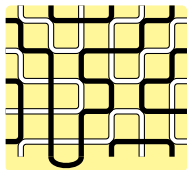
- Le couplage du centre est le couplage *blanc* (l'arche 1–2 est gelée).
- **Miracle italien !** Sur cet exemple $\pi' = R\pi$, ce n'est pas vrai en général.

Type c : analyse italienne



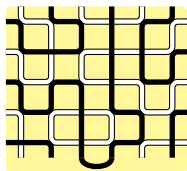
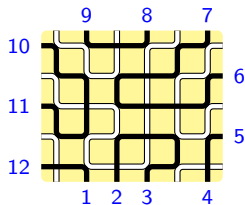
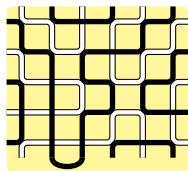
- Les figures extrêmes restent des FPL, le graphe comporte simplement une arête supplémentaire.

Type c : analyse italienne



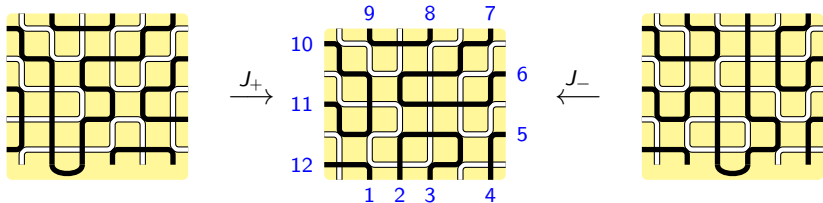
- Les figures extrêmes restent des FPL, le graphe comporte simplement une arête supplémentaire.
- Le couplage de gauche vaut $c_1\pi$, c'est-à-dire $e_1\pi$ privé de l'arche 1-2; brutal mais efficace !

Type c : analyse italienne



- Les figures extrêmes restent des FPL, le graphe comporte simplement une arête supplémentaire.
- Le couplage de gauche vaut $c_1\pi$, c'est-à-dire $e_1\pi$ privé de l'arche 1-2; brutal mais efficace !
- Le couplage de droite vaut $c_2\pi'$.

Type c : analyse italienne



- Les figures extrêmes restent des FPL, le graphe comporte simplement une arête supplémentaire.
- Le couplage de gauche vaut $c_1\pi$, c'est-à-dire $e_1\pi$ privé de l'arche 1-2; brutal mais efficace !
- Le couplage de droite vaut $c_2\pi'$.
- L'algorithme de Wieland reste valide, donc le couplage *blanc* central vaut : $c_1\pi = R^{-1}c_2\pi'$ (J_- est une involution, on peut changer le sens de la flèche).

Type c : analyse italienne (fin)

Après dégel et analyse des relations entre les opérateurs c_i et e_j (définitions très voisines) on obtient la relation attendue :

$$e_1\pi = R^{-1}e_2\pi'$$

autrement dit :

$$Re_1\pi = e_2\pi'$$

Type c : analyse italienne (fin)

Après dégel et analyse des relations entre les opérateurs c_i et e_j (définitions très voisines) on obtient la relation attendue :

$$e_1\pi = R^{-1}e_2\pi'$$

autrement dit :

$$Re_1\pi = e_2\pi'$$

On s'est fait un peu ...

Type c : analyse italienne (fin)

Après dégel et analyse des relations entre les opérateurs c_i et e_j (définitions très voisines) on obtient la relation attendue :

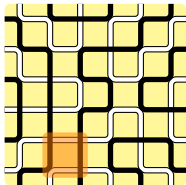
$$e_1\pi = R^{-1}e_2\pi'$$

autrement dit :

$$Re_1\pi = e_2\pi'$$

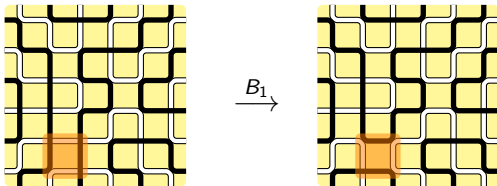
On s'est fait un peu ... enrhumé, non ?

G et J : quelle différence ?



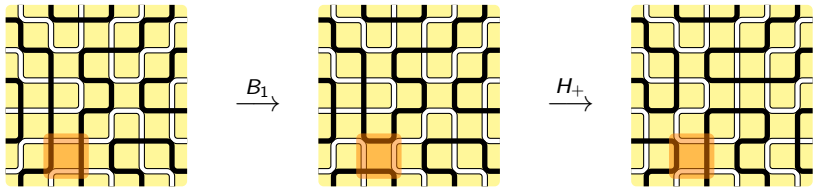
- Ici (brin numéro 2 de type c) relever e_1 n'est pas difficile !

G et J : quelle différence ?



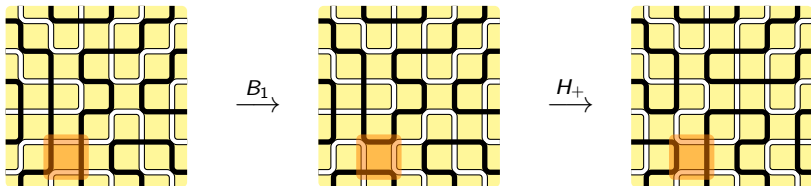
- Ici (brin numéro 2 de type c) relever e_1 n'est pas difficile !

G et J : quelle différence ?

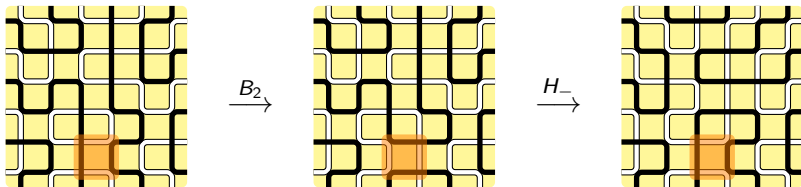


- Ici (brin numéro 2 de type c) relever e_1 n'est pas difficile !
- H_+ annule la bascule B_1 , donc $J_+ = H_+ B_1$.

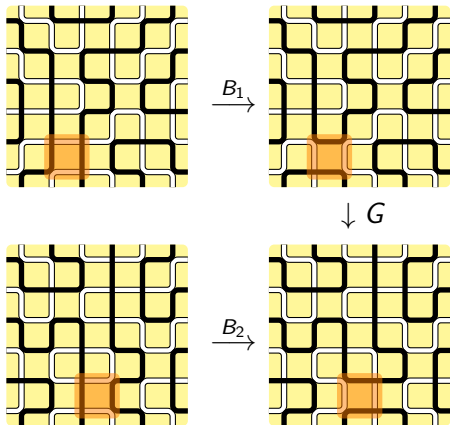
G et J : quelle différence ?



- Ici (brin numéro 2 de type c) relever e_1 n'est pas difficile !
- H_+ annule la bascule B_1 , donc $J_+ = H_+ B_1$.
- De même B_2 relève e_2 et $J_- = H_- B_2$.

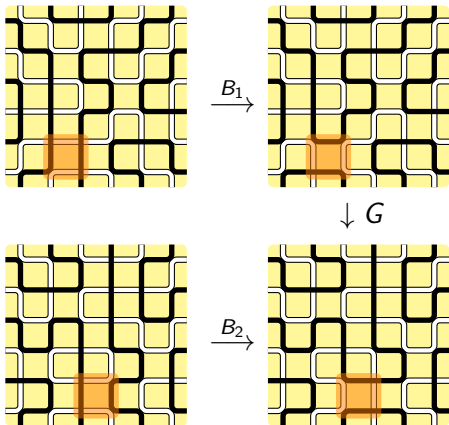


Type c : seconde analyse



- Bilan en inversant H_- et en utilisant $G = H_- H_+$

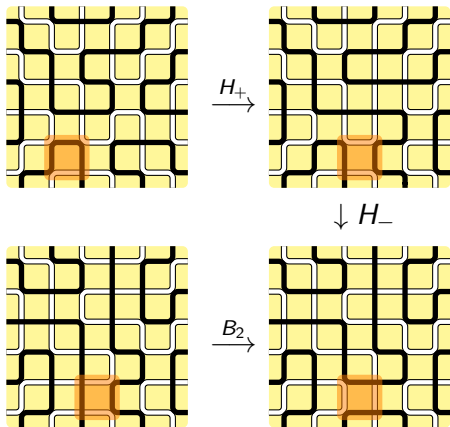
Type c : seconde analyse



- Bilan en inversant H_- et en utilisant $G = H_- H_+$
- On a relevé la relation de giration :

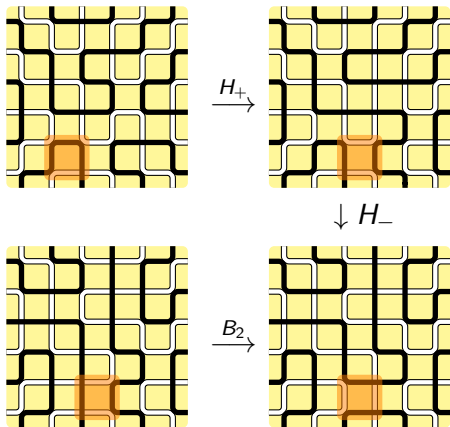
$$\begin{array}{ccc} \pi & \xrightarrow{e_1} & \\ & & \downarrow R \\ \pi' & \xrightarrow{e_2} & \end{array}$$

Type c : un autre exemple



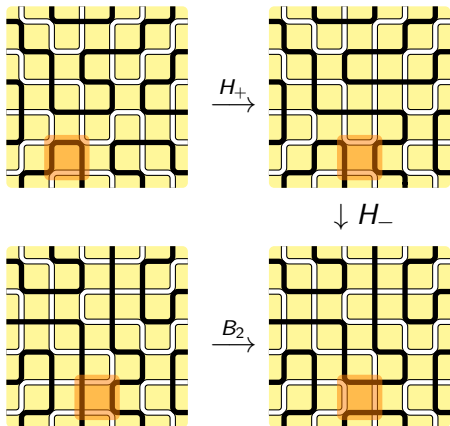
- Ici il n'y a pas de bascule B_1 donc $J_+ = H_+$

Type c : un autre exemple



- Ici il n'y a pas de bascule B_1 donc $J_+ = H_+$
- Le couplage π est invariant par e_1 (la réciproque est fausse)

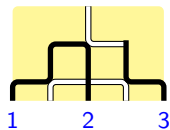
Type c : un autre exemple



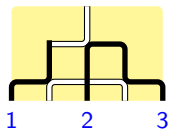
- Ici il n'y a pas de bascule B_1 donc $J_+ = H_+$
- Le couplage π est invariant par e_1 (la réciproque est fausse)
- et $e_2\pi' = R\pi$ mais $\pi' \neq R\pi$.

Raffinement du type c

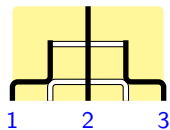
On peut à nouveau distinguer trois cas selon le second pas à partir du brin noir numéro 2, qui est à son tour de type a , b ou c :



ca



cb

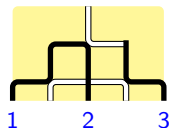


cc

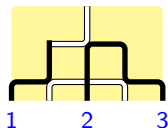
- Soit Φ_i le FPL *intermédiaire* $\Phi_i = J_+ \Phi = J_- \Phi'$.
- Si le FPL Φ est de type ca , il n'y a pas de bascule B_1 donc $J_+ = H_+$, Φ_i reste de type ca , le couplage π est invariant par e_1 et $e_2 \pi' = R\pi$.

Raffinement du type c

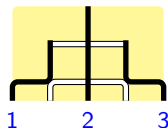
On peut à nouveau distinguer trois cas selon le second pas à partir du brin noir numéro 2, qui est à son tour de type a , b ou c :



ca



cb

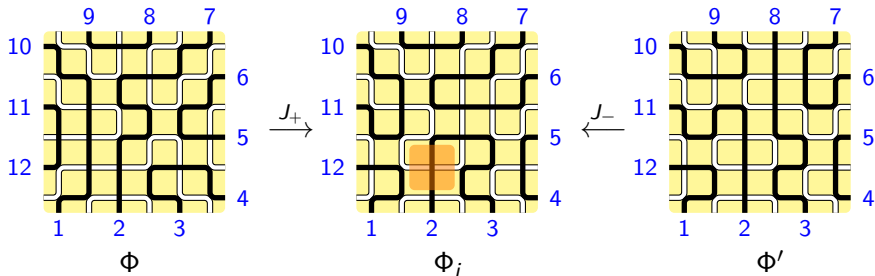


cc

- Soit Φ_i le FPL *intermédiaire* $\Phi_i = J_+ \Phi = J_- \Phi'$.
- Si le FPL Φ est de type ca , il n'y a pas de bascule B_1 donc $J_+ = H_+$, Φ_i reste de type ca , le couplage π est invariant par e_1 et $e_2 \pi' = R\pi$.
- Idem mutatis mutandis si Φ' est de type cb : Φ_i reste de type cb , le couplage π' est invariant par e_2 et $\pi' = Re_1 \pi$.

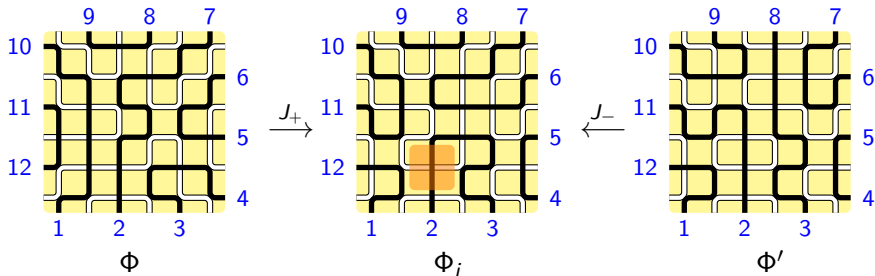
Type cc

Reste le cas où Φ_i est de type cc : Φ est de type cb ou cc tandis que Φ' est de type ca ou cc . C'est le cas du premier exemple utilisé pour cette présentation :



Type cc

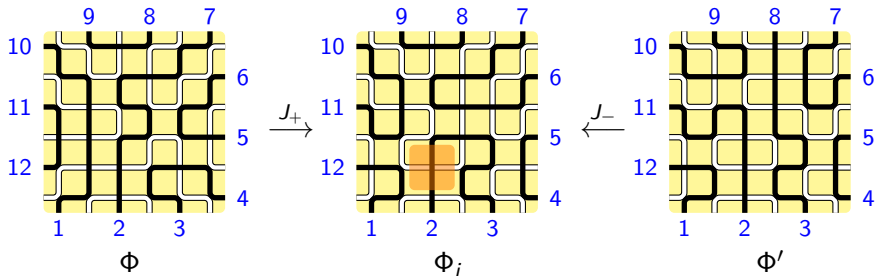
Reste le cas où Φ_i est de type *cc* : Φ est de type *cb* ou *cc* tandis que Φ' est de type *ca* ou *cc*. C'est le cas du premier exemple utilisé pour cette présentation :



- En appelant x_1, x_2 les numéros des brins noirs reliés aux brins 1 et 2 de Φ (ici $x_1 = 10$ et $x_2 = 7$), J_+ crée un chemin *blanc* qui relie x_1 et x_2 en croisant les deux pas noirs verticaux issus du brin 2.

Type cc

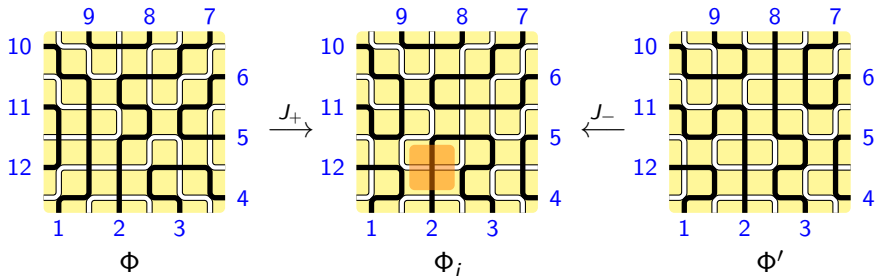
Reste le cas où Φ_i est de type *cc* : Φ est de type *cb* ou *cc* tandis que Φ' est de type *ca* ou *cc*. C'est le cas du premier exemple utilisé pour cette présentation :



- En appelant x_1, x_2 les numéros des brins noirs reliés aux brins 1 et 2 de Φ (ici $x_1 = 10$ et $x_2 = 7$), J_+ crée un chemin *blanc* qui relie x_1 et x_2 en croisant les deux pas noirs verticaux issus du brin 2.
- C'est le *même* chemin blanc qui est créé par J_- à partir de Φ' , donc les brins noirs 2 et 3 de Φ' sont reliés aux brins $x_1 + 1$ et $x_2 + 1$ (ici 11 et 8).

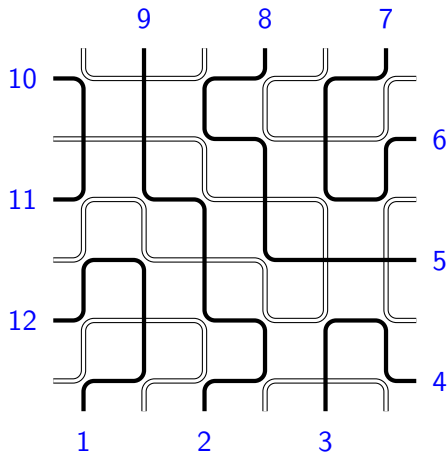
Type cc

Reste le cas où Φ_i est de type *cc* : Φ est de type *cb* ou *cc* tandis que Φ' est de type *ca* ou *cc*. C'est le cas du premier exemple utilisé pour cette présentation :



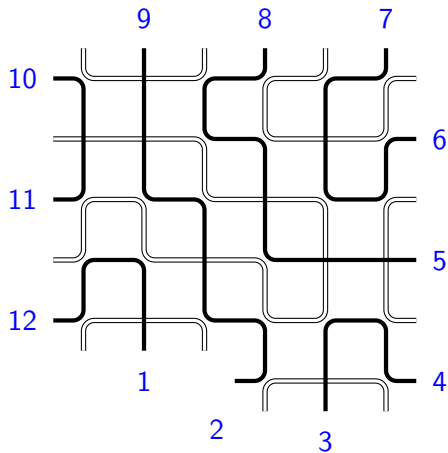
- En appelant x_1, x_2 les numéros des brins noirs reliés aux brins 1 et 2 de Φ (ici $x_1 = 10$ et $x_2 = 7$), J_+ crée un chemin *blanc* qui relie x_1 et x_2 en croisant les deux pas noirs verticaux issus du brin 2.
- C'est le *même* chemin blanc qui est créé par J_- à partir de Φ' , donc les brins noirs 2 et 3 de Φ' sont reliés aux brins $x_1 + 1$ et $x_2 + 1$ (ici 11 et 8). Il en résulte que dans ce cas $\pi' = R\pi$.

Nouvelle giration (type *b*) : algorithme



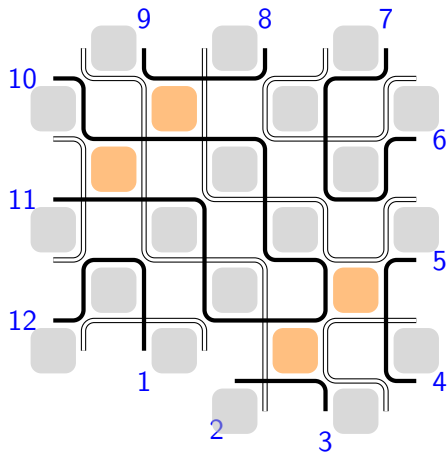
- Supprimer la partie gelée.

Nouvelle giration (type *b*) : algorithme



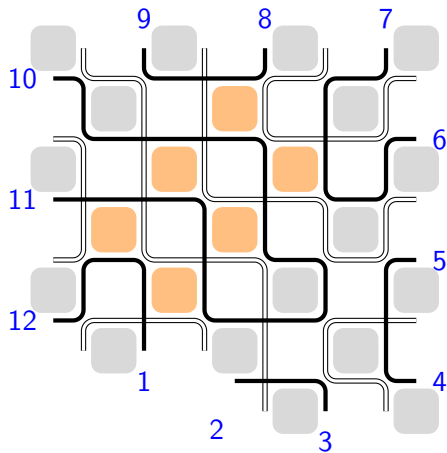
- Supprimer la partie gelée.

Nouvelle giration (type *b*) : algorithme



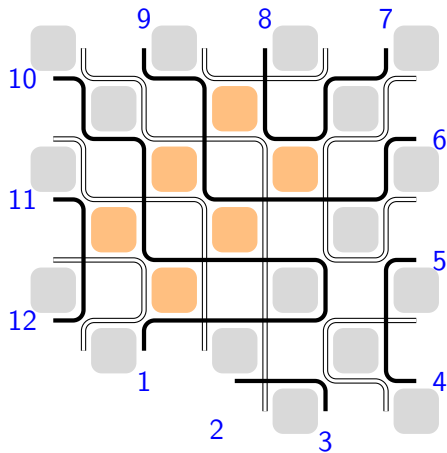
- Supprimer la partie gelée.
- Appliquer J_+ ... c'est fait.

Nouvelle giration (type *b*) : algorithme



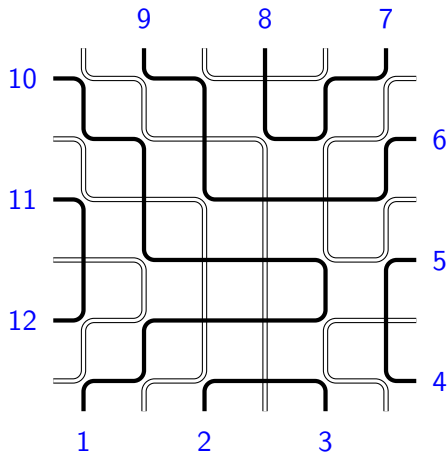
- Supprimer la partie gelée.
- Appliquer J_+ ... c'est fait.
- Appliquer J_- ...

Nouvelle giration (type *b*) : algorithme



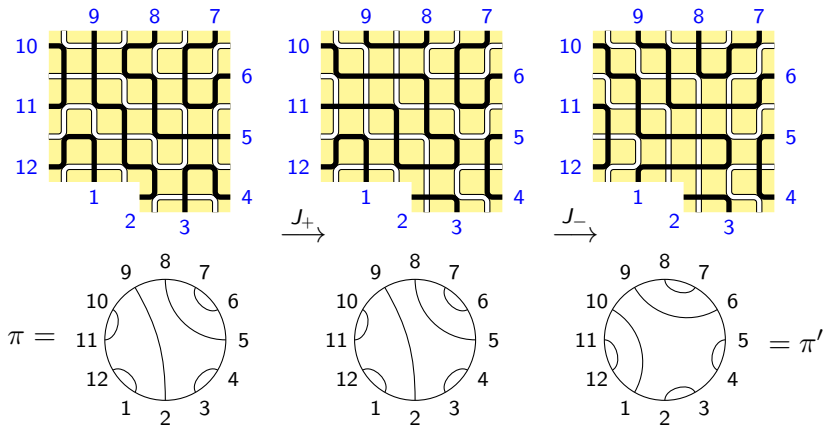
- Supprimer la partie gelée.
- Appliquer J_+ ... c'est fait.
- Appliquer J_- ...
- Il ne reste qu'à rétablir la partie gelée.

Nouvelle giration (type b) : algorithme



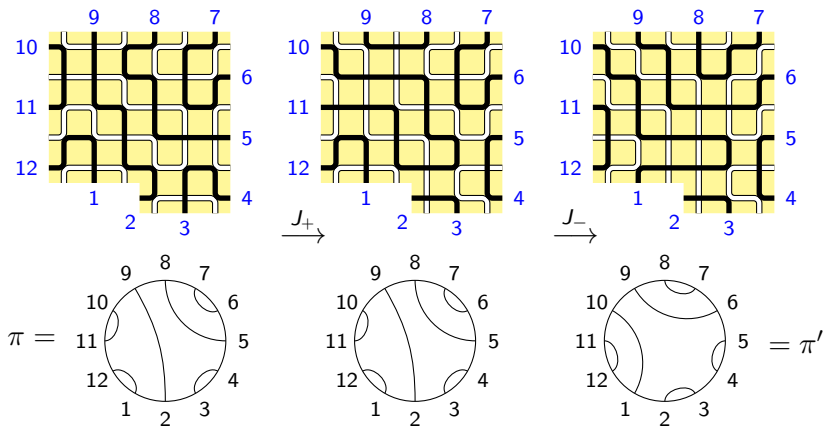
- Supprimer la partie gelée.
- Appliquer J_+ ... c'est fait.
- Appliquer J_- ...
- Il ne reste qu'à rétablir la partie gelée.

Couplages



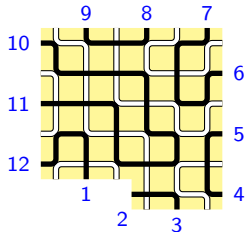
- Le couplage du centre est le couplage *blanc*, identique à π par définition de J_+ .

Couplages



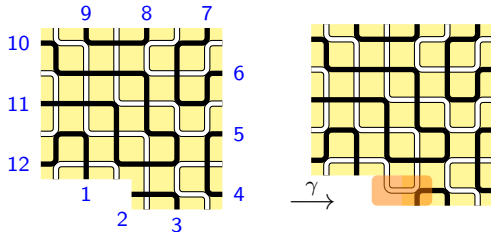
- Le couplage du centre est le couplage *blanc*, identique à π par définition de J_+ .
- On a $e_2\pi' = \pi' = Re_1\pi$, mais pourquoi diable ?

Ingéniosité italienne



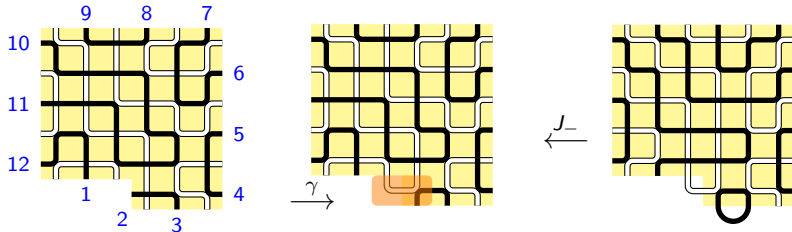
- Le FPL de gauche est une copie de celui du milieu sur la diapositive précédente, son couplage *blanc* vaut π .

Ingéniosité italienne



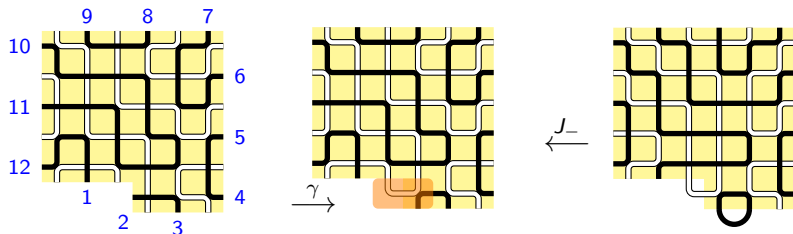
- Le FPL de gauche est une copie de celui du milieu sur la diapositive précédente, son couplage *blanc* vaut π .
- La transformation γ intervertit les brins noir et blanc numéros 2 puis relie les brins *blancs* 1 et 2 : le couplage blanc correspondant vaut $c_1\pi$.

Ingéniosité italienne



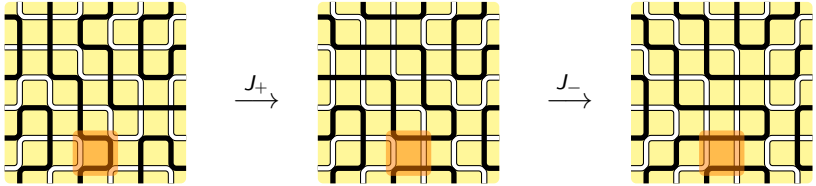
- Le FPL de gauche est une copie de celui du milieu sur la diapositive précédente, son couplage *blanc* vaut π .
- La transformation γ intervertit les brins noir et blanc numéros 2 puis relie les brins *blancs* 1 et 2 : le couplage blanc correspondant vaut $c_1\pi$.
- Sur le FPL de droite on applique les mêmes transformations et on relie des brins noirs 2 et 3, ce qui remplace π' par $c_2\pi'$.

Ingéniosité italienne



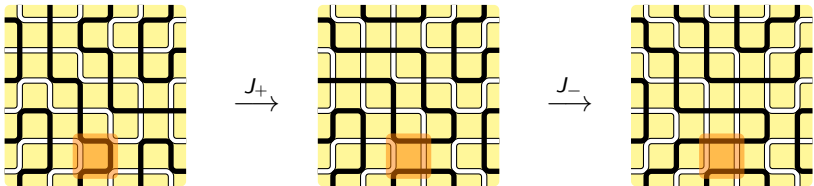
- Le FPL de gauche est une copie de celui du milieu sur la diapositive précédente, son couplage *blanc* vaut π .
- La transformation γ intervertit les brins noir et blanc numéros 2 puis relie les brins *blancs* 1 et 2 : le couplage blanc correspondant vaut $c_1\pi$.
- Sur le FPL de droite on applique les mêmes transformations et on relie des brins noirs 2 et 3, ce qui remplace π' par $c_2\pi'$.
- L'application de J_- fournit la relation $Rc_1\pi = c_2\pi'$!

Pour les incroyables



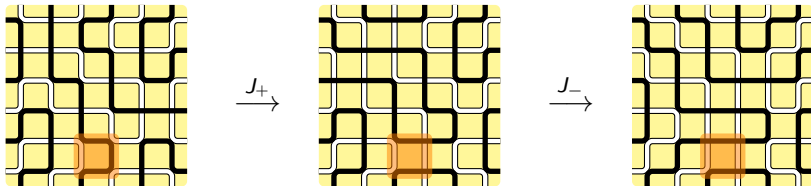
- La suppression de la partie gelée a pour seule conséquence de modifier le traitement de la cellule marquée ci-dessus.

Pour les incroyables



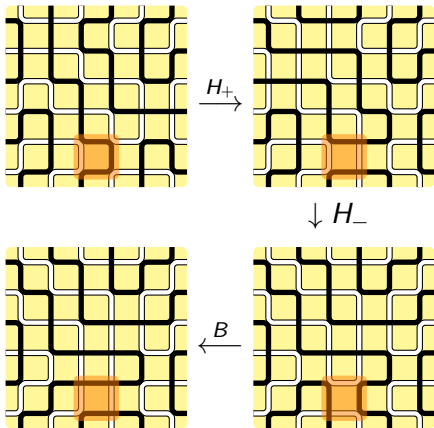
- La suppression de la partie gelée a pour seule conséquence de modifier le traitement de la cellule marquée ci-dessus.
- Cette cellule est "paire" donc $J_+ = H_+$.

Pour les incroyables

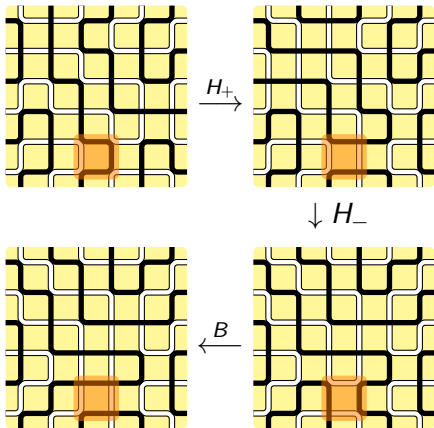


- La suppression de la partie gelée a pour seule conséquence de modifier le traitement de la cellule marquée ci-dessus.
- Cette cellule est “paire” donc $J_+ = H_+$.
- Par contre $J_- = BH_-$ où B désigne la bascule éventuelle qui relève e_2 .

Type b : seconde analyse

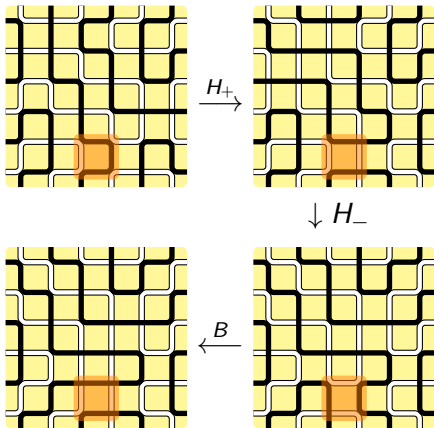


Type b : seconde analyse



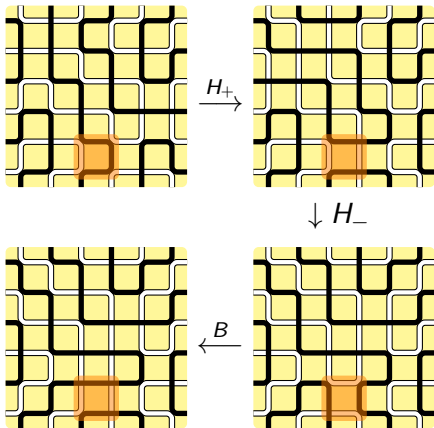
- $G = H_- H_+$ d'où
 $\pi' = e_2 R \pi$.

Type b : seconde analyse



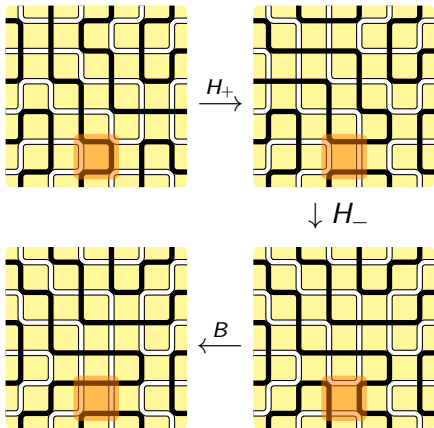
- $G = H_- H_+$ d'où $\pi' = e_2 R \pi$.
- Mais où est passé e_1 ?

Type b : seconde analyse



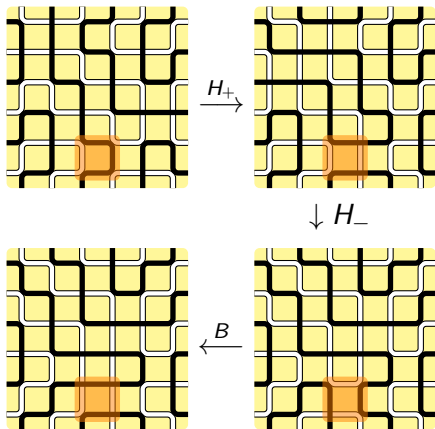
- $G = H_- H_+$ d'où $\pi' = e_2 R \pi$.
- Mais où est passé e_1 ?
- Réponse : $e_2 R = R e_1$!

Type b : seconde analyse



- $G = H_- H_+$ d'où $\pi' = e_2 R \pi$.
- Mais où est passé e_1 ?
- Réponse : $e_2 R = R e_1$!
- Si après $J_+ = H_+$ la cellule marquée n'est pas une bascule on a une giration ordinaire.

Type b : seconde analyse

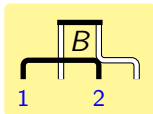


- $G = H_- H_+$ d'où $\pi' = e_2 R \pi$.
- Mais où est passé e_1 ?
- Réponse : $e_2 R = R e_1$!
- Si après $J_+ = H_+$ la cellule marquée n'est pas une bascule on a une giration ordinaire.
- Sinon la cellule marquée est une bascule, comme sur l'exemple, et B relève e_2 d'où $\pi' = e_2 \pi'$.

Nouvelle giration : type *a*

Le type *a* est évidemment symétrique du type *b*.

- Dans la configuration suivante :

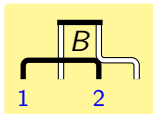


la transformation $J = GB$ (bascule suivie d'une giration ordinaire) transforme Φ en Φ' de type *a* avec $\pi = e_1 R^{-1} \pi'$, soit : $R\pi = e_2 \pi'$.

Nouvelle giration : type *a*

Le type *a* est évidemment symétrique du type *b*.

- Dans la configuration suivante :



la transformation $J = GB$ (bascule suivie d'une giration ordinaire) transforme Φ en Φ' de type *a* avec $\pi = e_1 R^{-1} \pi'$, soit : $R\pi = e_2 \pi'$.

- Dans les autres cas on choisit simplement $J = G$.

Ecurie en vue

- Les nouvelles relations de giration ont permis de développer :

$$S(e_1 - 1) |s\rangle = \sum_i S(e_i - 1) |s_{\bullet i}^c\rangle$$

où i parcourt les numéros des brins noirs de la ligne du bas.

Ecurie en vue

- Les nouvelles relations de giration ont permis de développer :

$$S(e_1 - 1) |s\rangle = \sum_i S(e_i - 1) |s_{\bullet i}^c\rangle$$

où i parcourt les numéros des brins noirs de la ligne du bas.

- Il reste à prouver que *chaque* terme de cette somme est nul.

Ecurie en vue

- Les nouvelles relations de giration ont permis de développer :

$$S(e_1 - 1) |s\rangle = \sum_i S(e_i - 1) |s_{\bullet i}^c\rangle$$


où i parcourt les numéros des brins noirs de la ligne du bas.

- Il reste à prouver que *chaque* terme de cette somme est nul.
- Dans la suite i est fixé ($i = 2$ pour les exemples), et $|s_{\bullet i}^c\rangle$ est la projection (par couplage) de

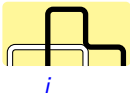
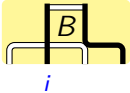
$$\sum_{\text{type}(\Phi)=c} ||\Phi\rangle\rangle$$

où le type est celui du chemin issu du brin noir numéro i .

Types bx et cx

- Si Φ est de type cb :  son couplage est invariant par e_i .
- Les FPL de type cb sont donc éliminés dans le calcul de $(e_i - 1) | s_{\bullet i}^c \rangle$.

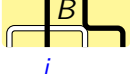
Types bx et cx

- Si Φ est de type cb :  son couplage est invariant par e_i .
- Les FPL de type cb sont donc éliminés dans le calcul de $(e_i - 1) | s_{\bullet i}^c \rangle$.
- Il reste les configurations :  — ces FPL sont de type ca ou cc .
On abrègera ce type en cx .

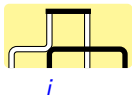
Types bx et cx

- Si Φ est de type cb :  son couplage est invariant par e_i .

- Les FPL de type cb sont donc éliminés dans le calcul de $(e_i - 1) | s_{\bullet i}^c \rangle$.

- Il reste les configurations :  — ces FPL sont de type ca ou cc .
On abrègera ce type en cx .

- Si Φ est de type cx on relève e_i en basculant B :
— ces FPL seront dits de type bx .



Le lemme qui décoiffe

- Le terme $(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle$ est donc la projection de :

$$\sum_{\text{type}(\Phi)=bx} \|\Phi\rangle\rangle - \sum_{\text{type}(\Phi)=cx} \|\Phi\rangle\rangle$$

Le lemme qui décoiffe

- Le terme $(e_i - 1) |s_{\bullet i}^c\rangle$ est donc la projection de :

$$\sum_{\text{type}(\Phi)=bx} ||\Phi\rangle\rangle - \sum_{\text{type}(\Phi)=cx} ||\Phi\rangle\rangle$$

- Dans la suite une *classe* de couplages désigne une classe modulo l'équivalence par rotation (pour les couplages de taille 4 il existe trois classes).

Le lemme qui décoiffe

- Le terme $(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle$ est donc la projection de :

$$\sum_{\text{type}(\Phi)=bx} ||\Phi\rangle\rangle - \sum_{\text{type}(\Phi)=cx} ||\Phi\rangle\rangle$$

- Dans la suite une *classe* de couplages désigne une classe modulo l'équivalence par rotation (pour les couplages de taille 4 il existe trois classes).
- Le terme $S(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle$ est nul si et seulement si chaque "camp" (les bx et les cx) possède le même nombre de représentants dans chaque classe.

Le lemme qui décoiffe

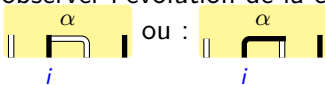
- Le terme $(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle$ est donc la projection de :

$$\sum_{\text{type}(\Phi)=bx} ||\Phi\rangle\rangle - \sum_{\text{type}(\Phi)=cx} ||\Phi\rangle\rangle$$

- Dans la suite une *classe* de couplages désigne une classe modulo l'équivalence par rotation (pour les couplages de taille 4 il existe trois classes).
- Le terme $S(e_i - 1)|s_{\bullet i}^c\rangle$ est nul si et seulement si chaque "camp" (les bx et les cx) possède le même nombre de représentants dans chaque classe.
- Ce résultat découle du lemme suivant : **chaque orbite de l'opérateur de giration G contient autant de FPL de type bx que de FPL de type cx !**

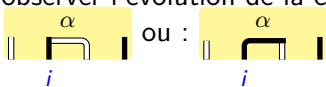
Preuve du lemme

Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



Preuve du lemme

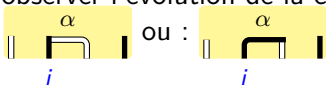
Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



- L'opérateur H_+ ne modifie jamais α .

Preuve du lemme

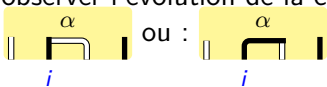
Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



- L'opérateur H_+ ne modifie jamais α .
- L'opérateur H_- modifie α si et seulement si la cellule au-dessus de α est une bascule.

Preuve du lemme

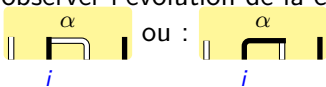
Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



- L'opérateur H_+ ne modifie jamais α .
- L'opérateur H_- modifie α si et seulement si la cellule au-dessus de α est une bascule.
- Donc α passe de blanc à noir (resp. de noir à blanc) si et seulement si $G\Phi$ est de type bx (resp. cx) — dans les autres cas α ne change pas de couleur.

Preuve du lemme

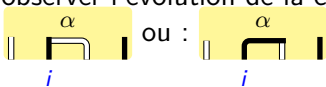
Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



- L'opérateur H_+ ne modifie jamais α .
- L'opérateur H_- modifie α si et seulement si la cellule au-dessus de α est une bascule.
- Donc α passe de blanc à noir (resp. de noir à blanc) si et seulement si $G\Phi$ est de type bx (resp. cx) — dans les autres cas α ne change pas de couleur.
- Dans une orbite la couleur de α varie de façon cyclique.

Preuve du lemme

Il suffit d'observer l'évolution de la couleur de l'arête α lors d'une giration :



- L'opérateur H_+ ne modifie jamais α .
- L'opérateur H_- modifie α si et seulement si la cellule au-dessus de α est une bascule.
- Donc α passe de blanc à noir (resp. de noir à blanc) si et seulement si $G\Phi$ est de type bx (resp. cx) — dans les autres cas α ne change pas de couleur.
- Dans une orbite la couleur de α varie de façon cyclique.

C'est fini !