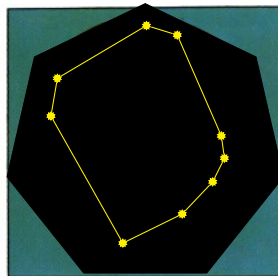
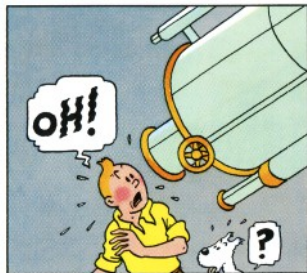


Probabilité que  $n$  points soient en position convexe dans  
un  $\kappa$ -gone régulier :  
Résultats asymptotiques.

Ludovic Morin

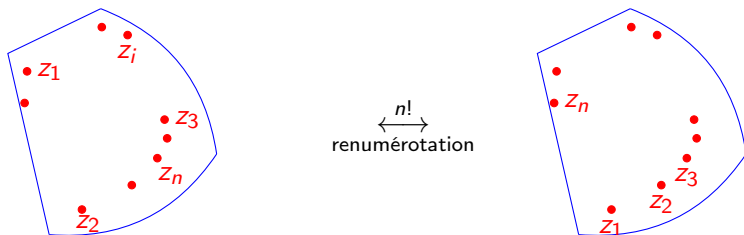
Lundi 11 décembre 2023

# Un peu d'astronomie



# Notations

- $\mathbb{P}_K(n)$  : probabilité que  $n$  points i.i.d. uniformément tirés dans un compact convexe  $K$  d'aire 1 soient en position convexe.
- Position convexe canonique :



# Notations

- $\mathcal{C}_\kappa$  : un  $\kappa$ -gone régulier (convexe) d'aire 1
- $\mathbb{P}_\kappa(n) := \mathbb{P}_{\mathcal{C}_\kappa}(n)$  la probabilité que  $n$  points i.i.d. uniformément tirés dans  $\mathcal{C}_\kappa$  soient en position convexe.

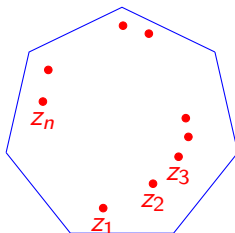


Figure – Un  $n$ -uplet de points  $z[n]$  en position convexe canonique dans le 7-gone  $\mathcal{C}_7$

## Théorème : M., 2023

Soit  $\kappa \geq 3$  un entier. On a

$$\mathbb{P}_\kappa(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C_\kappa \cdot \frac{e^{2n} \kappa^{3n} r_\kappa^{2n} \sin(\theta_\kappa)^n}{4^n n^{2n+\kappa/2}},$$

où

$$C_\kappa = \frac{1}{\pi^{\kappa/2} \sqrt{d_\kappa}} \frac{\sqrt{\kappa^{\kappa+1}}}{4^\kappa (1 + \cos(\theta_\kappa))^\kappa},$$

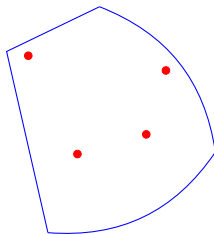
and

$$d_\kappa = \frac{\kappa}{3 \cdot 2^\kappa} \left( 2(-1)^{\kappa-1} + (2 - \sqrt{3})^\kappa + (2 + \sqrt{3})^\kappa \right).$$

## Théorème : Blaschke, 1917

Pour tout domaine  $K \subset \mathbb{R}^2$  compact convexe d'aire 1,

$$\frac{2}{3} = \mathbb{P}_{\Delta}(4) \leq \mathbb{P}_K(4) \leq \mathbb{P}_{\circ}(4) = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

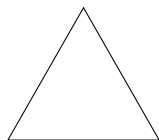


## Théorème : Blaschke, 1917

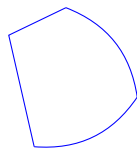
Pour tout domaine  $K \subset \mathbb{R}^2$  compact convexe d'aire 1,

$$\frac{2}{3} = \mathbb{P}_{\Delta}(4) \leq \mathbb{P}_K(4) \leq \mathbb{P}_{\circ}(4) = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

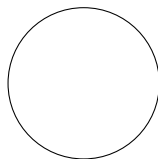
$$\mathbb{P}_K(4) = 1 - 4\mathbb{E}_K[\mathcal{A}(U_1, U_2, U_3)].$$



←  
shaking



→  
symmetrization



Pour tout domaine  $K \subset \mathbb{R}^2$  compact convexe d'aire 1,

**Théorème : Blaschke, 1917**

$$\frac{2}{3} = \mathbb{P}_{\Delta}(4) \leq \mathbb{P}_K(4) \leq \mathbb{P}_{\circ}(4) = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

**Théorème : Marckert, Rahmani, 2021**

$$\frac{11}{36} = \mathbb{P}_{\Delta}(5) \leq \mathbb{P}_K(5) \leq \mathbb{P}_{\circ}(5) = 1 - \frac{305}{48\pi^2}.$$

**Conjecture (dans le plan)**

$$\mathbb{P}_{\Delta}(n) \leq \mathbb{P}_K(n) \leq \mathbb{P}_{\circ}(n), \forall n \geq 6.$$



## Théorème : Blaschke, 1917

Pour tout domaine  $K \subset \mathbb{R}^2$  compact convexe d'aire 1,

$$\frac{2}{3} = \mathbb{P}_{\Delta}(4) \leq \mathbb{P}_K(4) \leq \mathbb{P}_{\circ}(4) = 1 - \frac{35}{12\pi^2}.$$

## Conjecture (en dimension $d \geq 3$ )

Pour un domaine convexe compact  $K \subset \mathbb{R}^d$  de volume 1,

$$\mathbb{P}_{\Delta^d}(d+2) \leq \mathbb{P}_K(d+2) \leq \mathbb{P}_{\circ^d}(d+2).$$

## Théorème : Valtr, 1995

$$\text{Pour tout } n \geq 3, \quad \mathbb{P}_4(n) = \mathbb{P}_{\square}(n) = \frac{1}{(n!)^2} \binom{2n-2}{n-1}^2.$$

## Théorème : Valtr, 1996

$$\text{Pour tout } n \geq 3, \quad \mathbb{P}_3(n) = \mathbb{P}_{\triangle}(n) = \frac{2^n(3n-3)!}{(2n)!((n-1)!)^3}.$$

## Théorème : JF, 2016

On peut calculer explicitement  $\mathbb{P}_{\circlearrowleft}(n)$  pour tout  $n \geq 3$  pourvu que l'on dispose d'un ordinateur assez puissant.

## Théorème : Bárány, 1997

Soit  $z[n]$  un  $n$ -uplet de points tirés uniformément et i.i.d. dans un domaine convexe compact  $K$  de  $\mathbb{R}^2$ . L'enveloppe convexe  $\text{CH}(z[n])$  de  $z[n]$  converge pour la distance de Hausdorff vers un domaine  $\text{Dom}(K)$  explicite (et calculable) contenu dans  $K$ , i.e. pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{P} (d_H(\text{CH}(z[n]), \text{Dom}(K)) < \epsilon) = 1.$$

Dans le cas des  $\kappa$ -gones, les formes limites sont les suivantes :

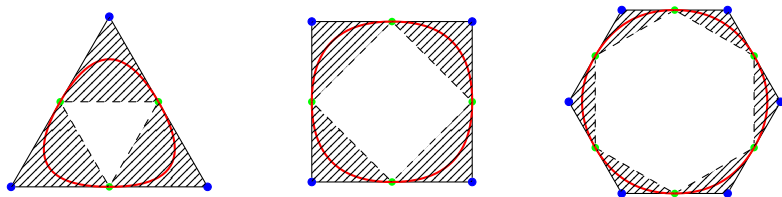


Figure – Pour chaque  $\kappa = 3, 4$  et  $6$ , la courbe rouge délimite le domaine convexe  $\text{Dom}(\mathcal{C}_\kappa)$  dans  $\mathcal{C}_\kappa$ .

## Théorème : Bárány, 1999

Pour tout domaine convexe compact  $K$  d'intérieur non vide,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 (\mathbb{P}_K(n))^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{4} e^2 \text{AP}^*(K)^3,$$

où  $\text{AP}^*(K) = \text{AP}(\text{Dom}(K))$ .

Cette limite donne l'ordre de la probabilité  $\mathbb{P}_K(n)$  mais cache d'autres termes d'ordre inférieur :

$$\mathbb{P}_K(n) \text{ est de l'ordre de } \frac{e^{2n} \text{AP}^*(K)^{3n}}{4^n n^{2n}}, \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

## Théorème : M., 2023

Soit  $\kappa \geq 3$  un entier. On a

$$\mathbb{P}_\kappa(n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} C_\kappa \cdot \frac{e^{2n} \kappa^{3n} r_\kappa^{2n} \sin(\theta_\kappa)^n}{4^n n^{2n+\kappa/2}},$$

où

$$C_\kappa = \frac{1}{\pi^{\kappa/2} \sqrt{d_\kappa}} \frac{\sqrt{\kappa^{\kappa+1}}}{4^\kappa (1 + \cos(\theta_\kappa))^\kappa},$$

and

$$d_\kappa = \frac{\kappa}{3 \cdot 2^\kappa} \left( 2(-1)^{\kappa-1} + (2 - \sqrt{3})^\kappa + (2 + \sqrt{3})^\kappa \right).$$

Notons que  $\text{AP}^*(\mathfrak{C}_\kappa) = \kappa (r_\kappa^2 \sin(\theta_\kappa))^{1/3}$ , ce qui affine le résultat de Bárány dans le cas très particulier des  $\kappa$ -gones !

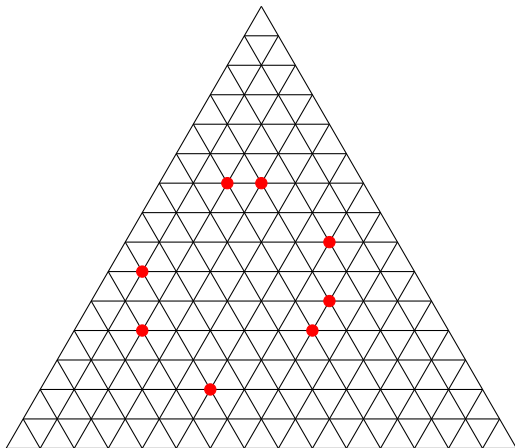
## Théorème : M., 2023

Soit  $\kappa \geq 3$  un entier, et soit  $z[n]$  uniformes i.i.d. dans  $\mathfrak{C}_\kappa$  conditionnés à être en position convexe. Quand  $n \rightarrow +\infty$ , on a

$$n^{1/2} d_H(\text{CH}(z[n]), \text{Dom}(\mathfrak{C}_\kappa)) \xrightarrow[n]{(d)} \Delta$$

où  $\Delta$  est une variable aléatoire non triviale.

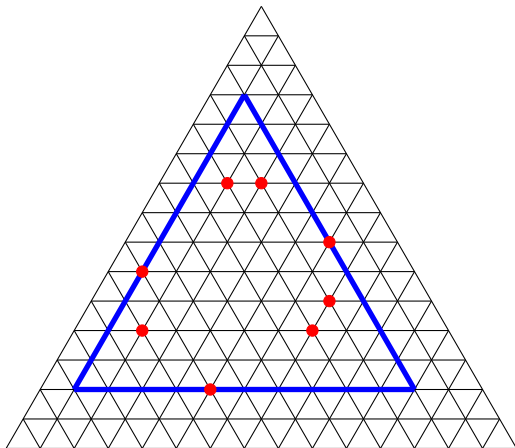
Triangle  $\Delta_m$  à coordonnées entières  $(0, 0); (0, m); (m, m)$





# La preuve de Valtr

En bleu, le « Polygone Contenant » PC :



On fixe un polygone contenant PC de côté  $c$  :

- 1 Compter les translations possibles dans  $\Delta_m$ .

$$\frac{(m-c+1)^2+(m-c+1)}{2}$$

- 2 Fixer la taille des chaînes convexes  $s_1, s_2, s_3$  et se placer dans les coins.

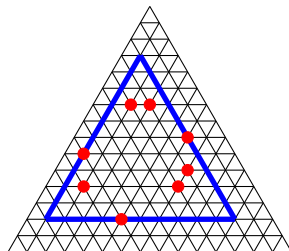
- 3 Reconstruire les chaînes en travaillant dans les coins :

- 1 Compter les partitions de  $c$

$$\binom{c+s_1+s_2-1}{s_1+s_2}$$

- 2 Construction des vecteurs :

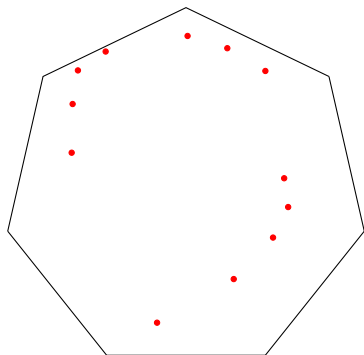
$$\text{FacteurCombi}(s_1, s_2, s_3)$$



## Morale de l'histoire :

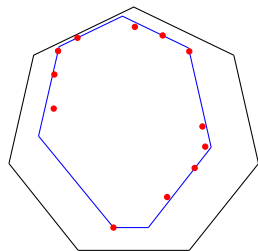
On a codé l'ensemble des  $z[n]$  en position convexe dans  $\Delta_m$  par :

- 1 un Polygone Contenant PC caractérisé par la longueur du côté  $c$ .
- 2 la donnée de  $(s_1, s_2, s_3)$  qui partitionnent  $n$ .
- 3 3 compositions du côté  $c$  pour former une chaîne convexe dans chaque coin.



$$\mathbb{P}_\kappa(n) = \text{Leb}(\{z[n] \text{ en position convexe dans } \mathfrak{C}_\kappa\})$$

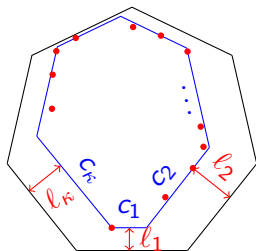
# Codage de l'ensemble des points en position convexe



- 1 Un « Polygone Contenant » PC
- 2 Des points de contact  $cp[\kappa]$  qui définissent  $\kappa$  « coins » et  $\kappa$  chaînes convexes
- 3 Des « partitions » des côtés du PC

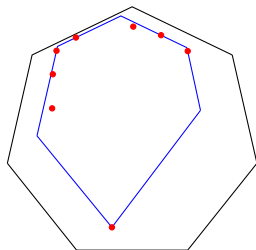
Comment la mesure de Lebesgue s'envoie-t-elle sur ce codage ?

# Codage de l'ensemble des points en position convexe



- 1  $PC(z[n])$  : le polygone équiangulaire minimal qui contient  $z[n]$
- 2  $l_j$  : distance du  $j^e$  côté à un point de  $z[n]$
- 3  $cp_j$  : le point de contact en question
- 4  $c_j$  : longueur du  $j^e$  côté du  $PC(z[n])$
- 5  $s_j$  : nombre de vecteurs qui lient  $cp_j$  à  $cp_{j+1}$

# Codage de l'ensemble des points en position convexe



En poussant parallèlement les côtés, on n'obtient pas toujours un PC à  $\kappa$  côtés !

## Lemme

Soit  $\tilde{\mathbb{P}}_{\kappa}(n) = \mathbb{P}(z[n] \text{ en pos. cvx. tel que PC}(z[n]) \text{ ait } \kappa \text{ côtés})$ . Alors

$$\mathbb{P}_{\kappa}(n) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \tilde{\mathbb{P}}_{\kappa}(n).$$

# 1. Le domaine d'existence du PC

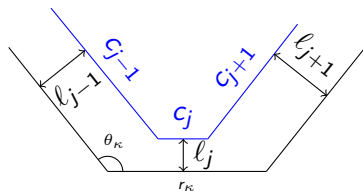


Figure – Caractéristiques d'un PC

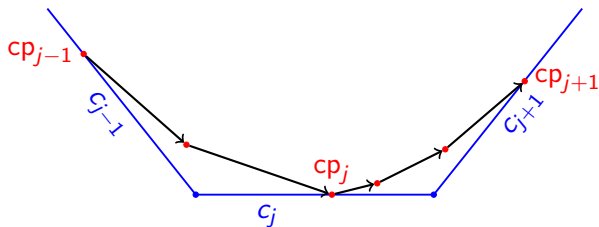
Les  $l[\kappa]$  et  $c[\kappa]$  sont liées par les  $\kappa$  équations :

$$c_j \sin(\theta_\kappa) + (l_{j-1} + l_{j+1}) + 2l_j \cos(\theta_\kappa) = \sin(\theta_\kappa)r_\kappa, \quad \forall j \in \{1, \dots, \kappa\}.$$



## 2. La formation des coins

Les coins se forment entre deux points de contact du PC :

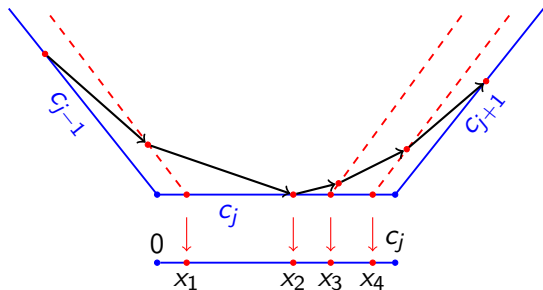


Cela fixe le nombre de vecteurs  $s_j$  dans le  $j^{\text{e}}$  coin.

Naturellement,  $\sum_{j=1}^k s_j = n$ .

### 3. Le codage des chaînes convexes dans des simplexes

Comment les chaînes convexes « composent » les côtés du PC :

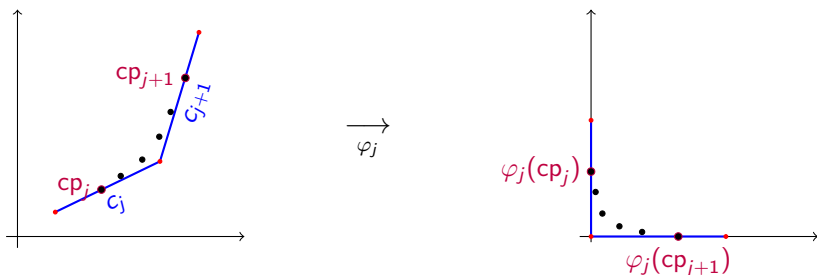


Lemme : Mesure de Lebesgue du simplexe

$$\text{Leb}(\{x[k], \text{ tels que } 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k < c\}) = \frac{c^{k-1}}{(k-1)!}$$

### 3. Le codage des chaînes convexes dans des simplexes

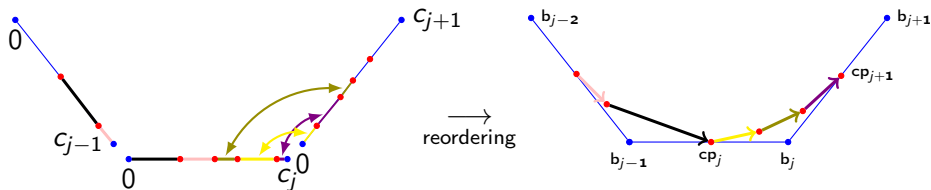
On définit pour tout  $j \in \{1, \dots, \kappa\}$  la transformation  $\varphi_j$  :



①  $\text{Jac}(\varphi_j) = \sin(\theta_\kappa)$  (indépendant de  $j$ )

# Le décodage, à PC fixé et taille des coins $s[\kappa]$ fixée

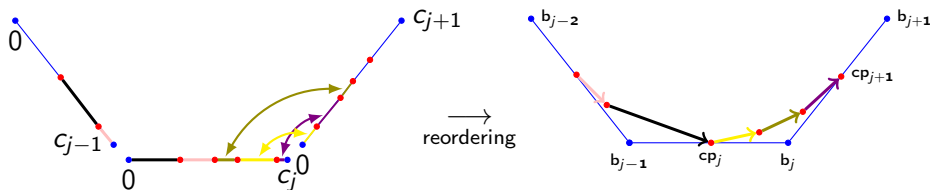
Combien peut-on construire de chaînes convexes contenues dans un PC, étant donnée  $\kappa$  partitions  $\text{Part}(c_j, s_j + s_{j+1})$  des côtés  $c_1, \dots, c_\kappa$  ?



- 1 On couple les morceaux pour construire  $s_j$  vecteurs dans le  $j^e$  coin.
- 2 On ordonne les vecteurs par ordre de pente croissante.

# Le décodage, à PC fixé et taille des coins $s[\kappa]$ fixée

Quelle est la mesure de Lebesgue de l'ensemble des chaînes convexes à PC donné ?



La mesure de Lebesgue du produit  $\prod_{j=1}^{\kappa} \text{Part}(c_j, s_j + s_{j+1})$  s'envoie sur la mesure de Lebesgue des chaînes convexes, avec un facteur combinatoire, et au Jacobien près !

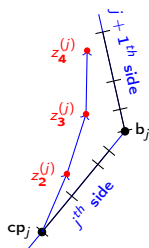
# Le décodage, à PC fixé et taille des coins $s[\kappa]$ fixée

L'application de codage (et son inverse de décodage) indexée par  $s[\kappa]$  :

$$\chi(\ell[\kappa], s[\kappa]) : z[n] \mapsto (\text{Part}(c_1, s_1 + s_2), \dots, \text{Part}(c_\kappa, s_\kappa + s_1))$$

est un  $\text{FacteurCombi}(s[\kappa])$ -difféomorphisme !

①  $\text{Jac}(\chi(\ell[\kappa], s[\kappa])) = 1 / \sin(\theta_\kappa)^{n-\kappa}$



# La distribution du couple $(\ell^{(n)}[\kappa], s^{(n)}[\kappa])$

Le couple  $(\ell^{(n)}[\kappa], s^{(n)}[\kappa])$  a la distribution suivante :

$$\mathbb{P} \left( \ell^{(n)}[\kappa] \in d\ell[\kappa], s^{(n)}[\kappa] = s[\kappa] \right) = f_{\kappa}^{(n)}(\ell[\kappa], s[\kappa]) d\ell[\kappa],$$

où

$$f_{\kappa}^{(n)}(\ell[\kappa], s[\kappa]) = \frac{n! \sin(\theta_{\kappa})^{n-\kappa}}{\tilde{\mathbb{P}}_{\kappa}(n)} \mathbb{1}_{s[\kappa] \in \mathbb{N}_{\kappa}(n)} \mathbb{1}_{\ell[\kappa] \in \mathcal{L}_{\kappa}} \prod_{j=1}^{\kappa} \frac{C_j^{s_{j-1} + s_j - 1}}{s_j!(s_{j-1} + s_j - 1)!}.$$

# Une histoire de densités

Quand  $n \rightarrow \infty$ , on a

- 1  $\ell_j \sim \frac{1}{n} \bar{\ell}_j$  où  $\bar{\ell}_j$  a une loi exponentielle.
- 2  $s_j \sim \frac{n}{\kappa} + \sqrt{\frac{n}{\kappa}} x_j$  où  $x[\kappa - 1]$  est un vecteur gaussien.

On introduit le tout dans  $f_\kappa^{(n)}(\ell[\kappa], s[\kappa])$  et on obtient la distribution jointe de  $\bar{\ell}[\kappa], x[\kappa - 1]$  :

$$g_\kappa^{(n)}(\bar{\ell}[\kappa], x[\kappa - 1]) := \underbrace{\omega(n, \kappa) \mathbb{1}_{\bar{\ell}[\kappa] \in n\mathcal{L}_\kappa}}_{\text{cv vers 1}} \underbrace{h_n^{(1)}(\bar{\ell}[\kappa], x[\kappa - 1])}_{\text{cv vers une densité}} \underbrace{h_n^{(2)}(x[\kappa - 1])}_{\text{cv vers une densité}},$$

où

$$\omega(n, \kappa) = \frac{n! \sin(\theta_\kappa)^{n-\kappa}}{\tilde{\mathbb{P}}_\kappa(n)} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi^{\kappa+1} d_\kappa}} \frac{\kappa^{3n} e^{3n}}{4^n n^{3n}} \right] \left[ \left( \frac{\kappa r_\kappa}{2m_\kappa} \right)^\kappa r_\kappa^{2n-\kappa} \right] \frac{1}{n^\kappa} \sqrt{\frac{n}{\kappa}}^{\kappa-1}.$$



$$g_{\kappa}^{(n)}(\bar{\ell}[\kappa], x[\kappa - 1]) := \omega(n, \kappa) \underbrace{\mathbb{1}_{\bar{\ell}[\kappa] \in n\mathcal{L}_{\kappa}}}_{\text{cv vers 1}} \underbrace{h_n^{(1)}(\bar{\ell}[\kappa], x[\kappa - 1])}_{\text{cv vers une densité}} \underbrace{h_n^{(2)}(x[\kappa - 1])}_{\text{cv vers une densité}},$$

où

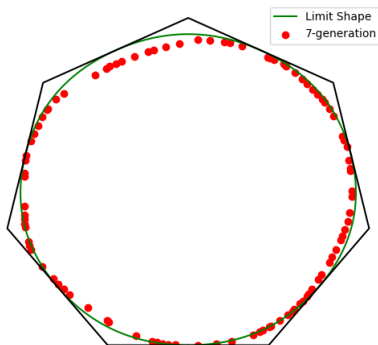
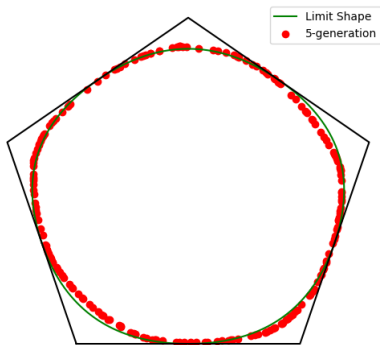
$$\omega(n, \kappa) = \frac{n! \sin(\theta_{\kappa})^{n-\kappa}}{\widetilde{\mathbb{P}}_{\kappa}(n)} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\pi^{\kappa+1} d_{\kappa}}} \frac{\kappa^{3n} e^{3n}}{4^n n^{3n}} \right] \left[ \left( \frac{\kappa r_{\kappa}}{2m_{\kappa}} \right)^{\kappa} r_{\kappa}^{2n-\kappa} \right] \frac{1}{n^{\kappa}} \sqrt{\frac{n}{\kappa}}^{\kappa-1}.$$

Un argument d'uniforme intégrabilité de  $g_{\kappa}^{(n)}$  permet de conclure que  $\omega(n, \kappa) \rightarrow 1$ .

Et hop !



# Aparté : tirage aléatoire

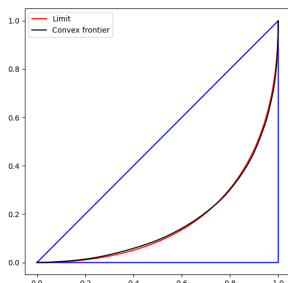
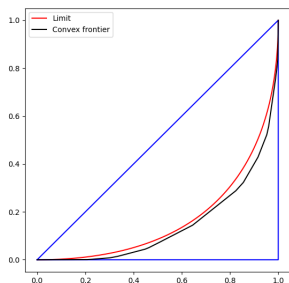


- 1 Pour  $(\ell[\kappa], s[\kappa])$ , on a déjà vu leur fluctuations !
- 2 Pour  $cp_j$ , conditionnellement à  $c_j$ , sa loi est une  $\beta(s_j, s_{j+1})$
- 3 Conditionnellement à  $(\ell[\kappa], s[\kappa], cp[\kappa])$ , quelles sont les fluctuations d'une chaîne convexe ?

# Retrouver la limite de Bárány

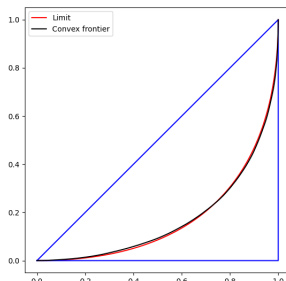
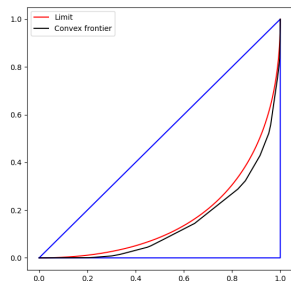
- On dispose de  $m$  vecteurs  $v_i = (x_i, y_i)$  tels que  $\sum_{i=1}^m x_i = \sum_{i=1}^m y_i = 1$
- On définit le processus :

$$C_m(\theta) = \left( \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{1}_{\frac{y_i}{x_i} \leq \tan(\frac{\pi}{2}\theta)}, \sum_{i=1}^m y_i \mathbb{1}_{\frac{y_i}{x_i} \leq \tan(\frac{\pi}{2}\theta)} \right), \theta \in [0, 1].$$



- En  $\mathbb{E}$ , et quand  $m \rightarrow \infty$ , on retrouve la paramétrisation de l'arc parabolique !

# Les fluctuations



- On étudie le processus  $Y_m(\theta) = \sqrt{m} (C_m(\theta) - \mathbb{E}[C_m(\theta)])$ ,  $\theta \in [0, 1]$ .
- On fait apparaître les théorèmes limites fameux.
- On conclut que les fluctuations sont  $\sim \frac{1}{\sqrt{m}}$  !

# Conclusion

