

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin, LaBRI, Université de Bordeaux

12 décembre 2022

Définition du modèle

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

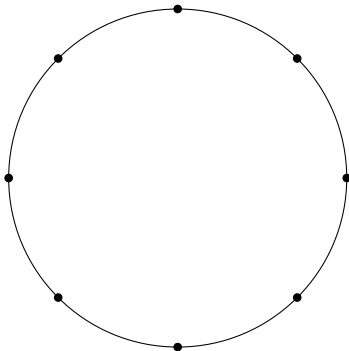
Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références

$G = (V, E)$, ici $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

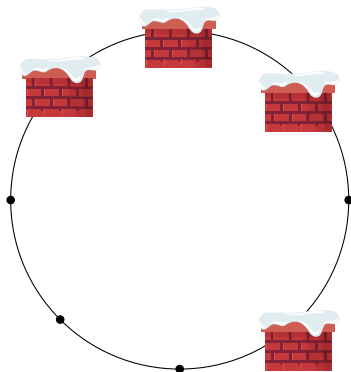
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$T^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

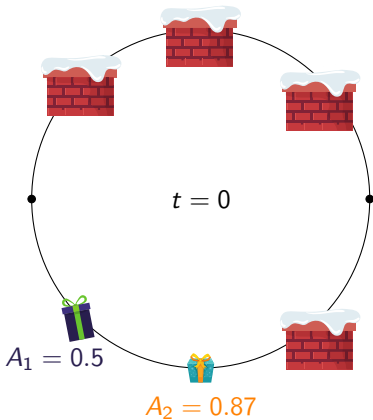
Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$T^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$B^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$A_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

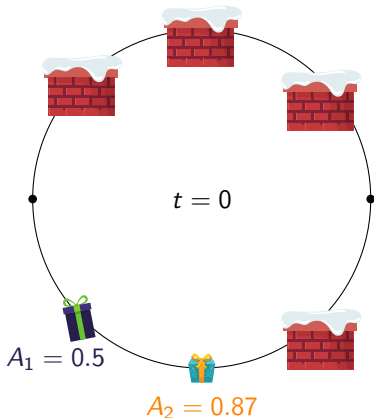
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$\mathbf{T}^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$\mathbf{B}^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$\mathbf{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}) \sim \mathcal{U} \left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t} \right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

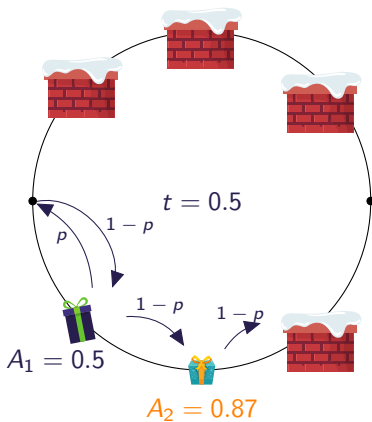
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$\mathbf{T}^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$\mathbf{B}^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$\mathbf{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}) \sim \mathcal{U} \left(\left(\begin{array}{c} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ N_b, N_t \end{array} \right) \right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

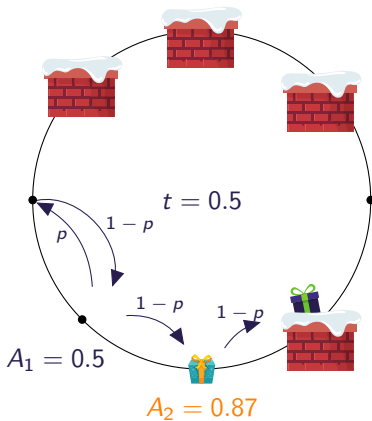
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$\mathbf{T}^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$\mathbf{B}^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$\mathbf{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}) \sim \mathcal{U} \left(\left(\begin{array}{c} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ N_b, N_t \end{array} \right) \right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

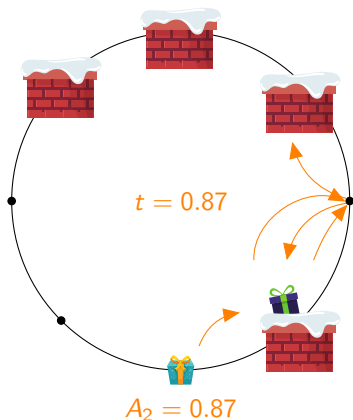
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$\mathbf{T}^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$\mathbf{B}^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$\mathbf{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}) \sim \mathcal{U} \left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t} \right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

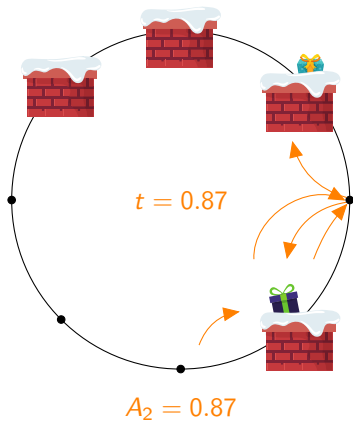
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



N_t trous :

$$\mathbf{T}^{init} = \left\{ \text{🧱} \right\}$$

N_b balles :

$$\mathbf{B}^{init} = \left\{ \text{🎁}, \text{🎁}, \dots \right\}$$

une horloge par balle :

$$\mathbf{A}_v \sim \mathcal{U}([0, 1])$$

$$(\mathbf{B}^{init}, \mathbf{T}^{init}) \sim \mathcal{U} \left(\binom{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}{N_b, N_t} \right)$$

où N_t et N_b fixés, $N_t \geq N_b$

Définition du modèle

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

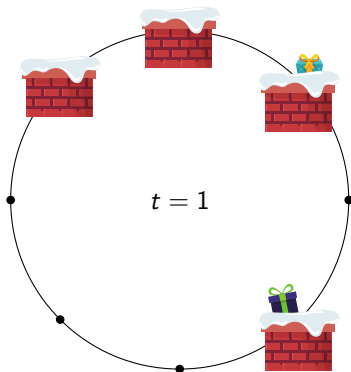
Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références



Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

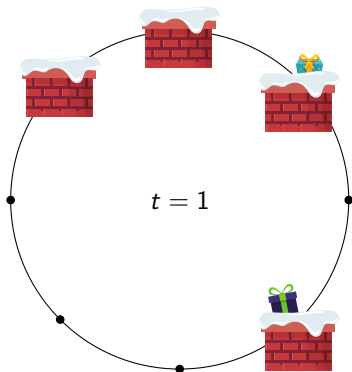
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références



Trous libres :

$$\mathcal{T}^L = \left\{ \text{positions des } \text{🧱} \text{ à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\mathcal{T}^O = \left\{ \text{positions des } \text{🧱} \text{ , } \text{🧱} \text{ , } \dots \text{ à } t=1 \right\}$$

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

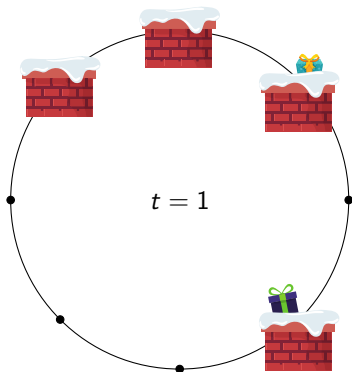
Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références



Trous libres :

$$\mathcal{T}^L = \left\{ \text{positions des } \text{🧱} \text{ à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\mathcal{T}^O = \left\{ \text{positions des } \text{🧱} \text{ , } \text{🧱} \text{ , } \dots \text{ à } t=1 \right\}$$

Proposition

La variable aléatoire \mathcal{T}^L est bien définie.

Définition du modèle

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

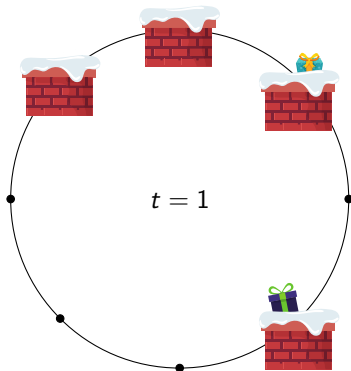
Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références



Trous libres :

$$\mathcal{T}^L = \left\{ \text{positions des } \text{brick} \text{ à } t = 1 \right\}$$

Trous occupés :

$$\mathcal{T}^O = \left\{ \text{positions des } \text{brick} \text{ à } t=1, \text{brick} \text{ à } t=1, \dots \right\}$$

Proposition

La variable aléatoire \mathcal{T}^L est bien définie.

Questions

Quelle est la loi de \mathcal{T}^L ?

Et que se passe-t-il si $G = \mathbb{Z}$?

Un peu de contexte : des systèmes de particules

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]

Un peu de contexte : des systèmes de particules

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion-limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW) ; Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius)

Un peu de contexte : des systèmes de particules

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

- premier modèle : Diaconis et Fulton [DF91]
- internal diffusion-limited aggregation (IDLA) (Lawler, Bramson, Griffeath [LBG92])
- Activated Random Walk (ARW) ; Diffusion-Limited Annihilating Systems (Cabezas, Rolla, Sidoravicius)
- processus de parking (Chassaing, Louchard, ...)
- interprétation probabiliste des Remixed Eulerian Numbers (Nadeau, Tewari [NT22])

Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*

Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

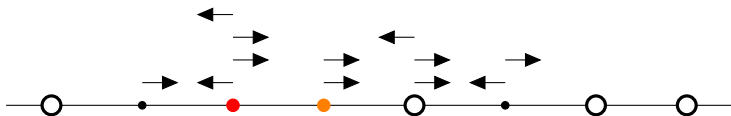
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $T^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} T^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

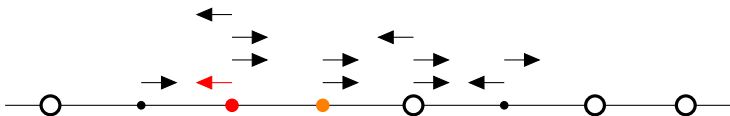
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

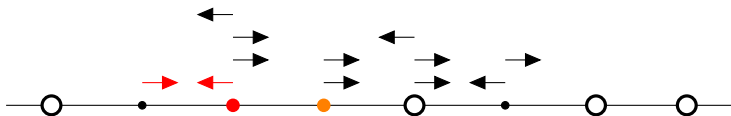
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

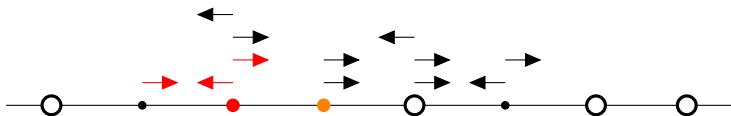
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

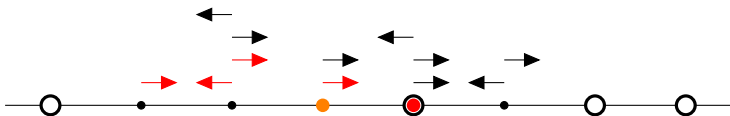
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

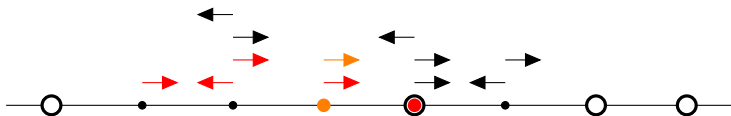
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

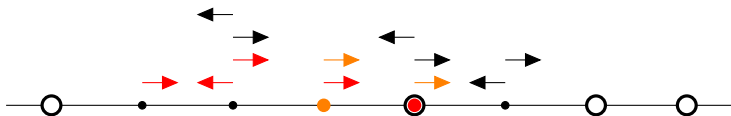
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

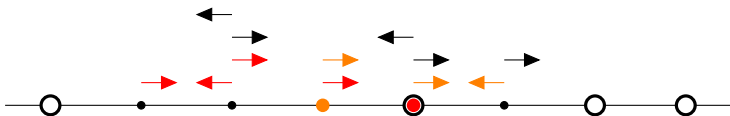
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

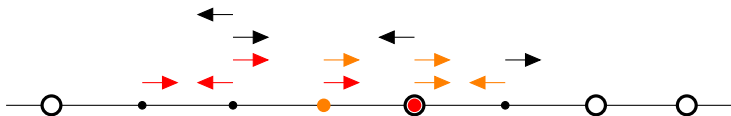
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

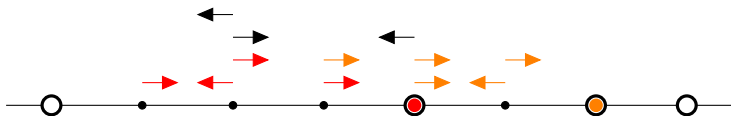
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



Une propriété de commutation

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

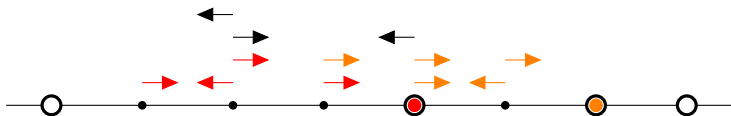
Références

Proposition (Diaconis-Fulton [DF91])

Sur un graphe fini, si on fixe O_1 et O_2 deux ordres d'activations des balles, $\mathcal{T}^L(O_1) \stackrel{L}{=} \mathcal{T}^L(O_2)$

Preuve : changement de point de vue - les collections de piles

- sur chaque sommet : une pile de flèches *partagée par toutes les balles*



- commutation : mêmes trous atteints, et même, mêmes flèches utilisées! $\mathcal{T}^L(O_1) = \mathcal{T}^L(O_2)$ p.s.

clé : pour tout sommet u ,

$$d_{out}(u) + \mathbb{1}_{u \in \mathcal{T}^{init}} = d_{in}(u) + \mathbb{1}_{u \in \mathcal{B}^{init}}$$

La loi de \mathcal{T}^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

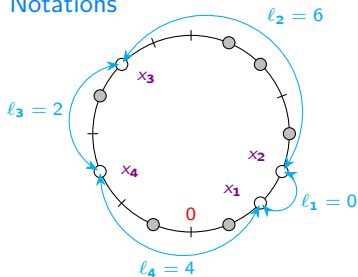
Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Notations



$$X = \{x_1, \dots, x_{N_\ell}\}, N_\ell = N_t - N_b.$$

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N_\ell} < n$$

$$\forall i, l_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^L = X) = ?$$

La loi de \mathcal{T}^L

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

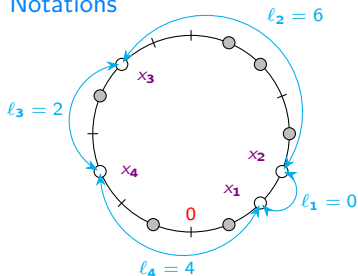
Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Notations



$$X = \{x_1, \dots, x_{N_\ell}\}, N_\ell = N_t - N_b.$$

$$0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_{N_\ell} < n$$

$$\forall i, \ell_i := (x_{i+1} - x_i - 1) \bmod n$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}^L = X) = ?$$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho}(\mathcal{T}^L = X) = \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum \prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i \in N_\ell}$ tels que $\sum_{i \in N_\ell} b_i = N_b$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Calcul de la loi de \mathcal{T}^L : cas particulier où $N_t = N_b + 1$

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_b+1, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x\}) = \frac{1}{n}$$

Calcul de la loi de \mathcal{T}^L : cas particulier où $N_t = N_b + 1$

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

clé : invariance par rotation

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_b+1, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x\}) = \frac{1}{n}$$

Lemme (Loi des trous libres - cas $N_t = N_b + 1$)

Pour tout $x \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$,

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_b+1, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x\} | x \in \mathcal{T}^{init}) = \frac{1}{N_t} = \frac{1}{N_b + 1}$$

Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

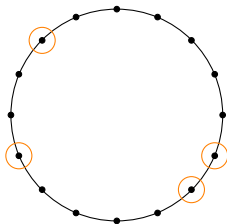
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\mathcal{T}^L = \{x_i\}) =$$



Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de \mathcal{T}^L

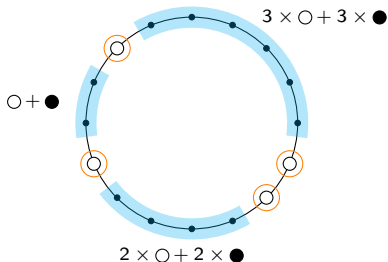
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, p} (\mathcal{T}^L = \{x_i\}) =$$



Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de \mathcal{T}^L

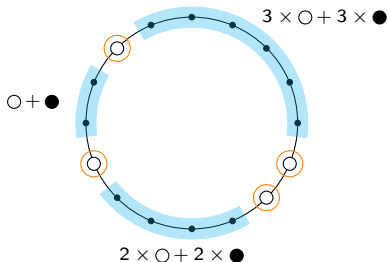
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho}(\mathcal{T}^L = \{x_i\}) = \mathbb{P}(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \substack{X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i}) \mathbb{P}(\substack{X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i})$$



Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

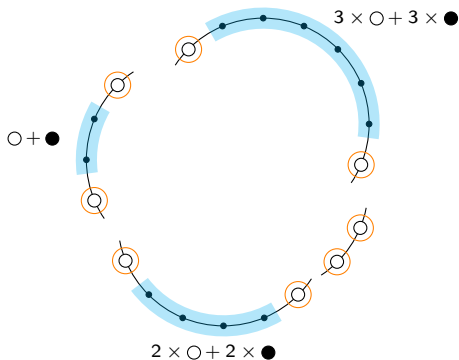
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x_i\}) = \mathbb{P} \left(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right) \mathbb{P} \left(\begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right)$$



Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

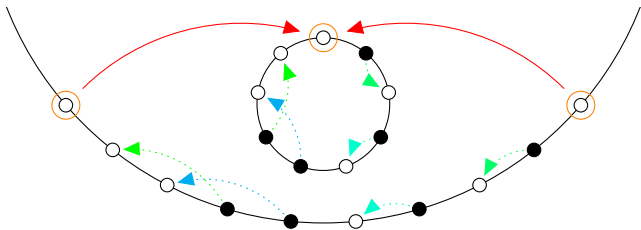
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x_i\}) = \mathbb{P} \left(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right) \mathbb{P} \left(\begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right)$$

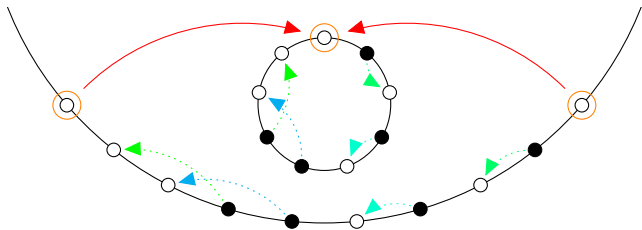


Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho} (\mathcal{T}^L = \{x_i\}) &= \mathbb{P} \left(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right) \mathbb{P} \left(\begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array} \right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1} \right) \end{aligned}$$



Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

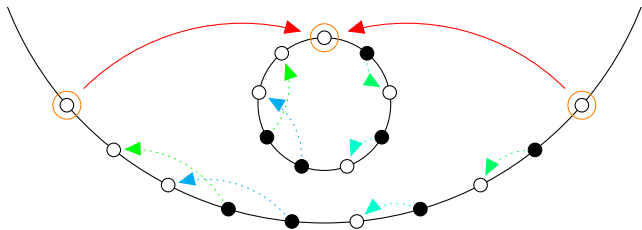
Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho}(\mathcal{T}^L = \{x_i\}) &= \mathbb{P}\left(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array}\right) \mathbb{P}\left(\begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathcal{B}_i| = b_i \end{array}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1}\right) \frac{\prod_{i=1}^{N_\ell} \binom{2b_i}{b_i}}{\binom{n}{N_t}}\end{aligned}$$



Calcul de la loi de \mathcal{T}^L

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Supposons que $n = N_t + N_b$. On pose alors $b_i := \ell_i/2$.

Preuve du théorème

$$\begin{aligned}\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho}(\mathcal{T}^L = \{x_i\}) &= \mathbb{P}\left(\mathcal{T}^L = \{x_i\} \mid \begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathbf{B}_i| = b_i \end{array}\right) \mathbb{P}\left(\begin{array}{l} X \subseteq \mathcal{T}^{init} \\ \text{et } |\mathbf{B}_i| = b_i \end{array}\right) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1}\right) \frac{\prod_{i=1}^{N_\ell} \binom{2b_i}{b_i}}{\binom{n}{N_t}}\end{aligned}$$

Théorème (Loi des trous libres)

$$\mathbb{P}^{n, N_b, N_t, \rho}(\mathcal{T}^L = X) = \frac{1}{|C^{n, N_b, N_t}|} \sum \prod_{i=1}^{N_\ell} \frac{1}{b_i + 1} \binom{\ell_i}{b_i, b_i, \ell_i - 2b_i}$$

où la somme porte sur les $(b_i)_{i \in N_\ell}$ tels que $\sum_{i \in N_\ell} b_i = N_b$, et $\forall i, 2b_i \leq \ell_i$.

Définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Modèle naturel

pour chaque sommet u , indépendamment :

- état : balle avec proba d_b OU trou avec proba d_t , $0 < d_b < d_t$
- horloge : $\mathbf{A}_u \sim \mathcal{U}([0, 1])$

Question

Le modèle est-il bien défini ?

Définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

Modèle naturel

pour chaque sommet u , indépendamment :

- état : balle avec proba d_b OU trou avec proba d_t , $0 < d_b < d_t$
- horloge : $\mathbf{A}_u \sim \mathcal{U}([0, 1])$

Question

Le modèle est-il bien défini ?

La difficulté

- une infinité de balles
- pour tout u , une infinité de v tels que $\mathbf{A}_v < \mathbf{A}_u$

Chaque balle trouve-t-elle un trou ?

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références

On définit $Z^{l,r}$ la configuration dans laquelle on a activé toutes les balles dans l'intervalle $\llbracket -l, r \rrbracket$.

Proposition

Pour tout v , $Z^{k,k}(v)$ est presque sûrement constant à partir d'un certain k . $Z := (\lim_k Z^{k,k}(v))_{v \in V}$ est une configuration finale.

Deux points clés :

- La propriété de commutation permet d'agrandir l'intervalle progressivement

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition
Loi de T^L

Conclusion

Références

On définit $Z^{l,r}$ la configuration dans laquelle on a activé toutes les balles dans l'intervalle $\llbracket -l, r \rrbracket$.

Proposition

Pour tout v , $Z^{k,k}(v)$ est presque sûrement constant à partir d'un certain k . $Z := (\lim_k Z^{k,k}(v))_{v \in V}$ est une configuration finale.

Deux points clés :

- La propriété de commutation permet d'agrandir l'intervalle progressivement
- chaque $Z^{k,k}(v)$ est modifié un nombre fini de fois p.s.

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

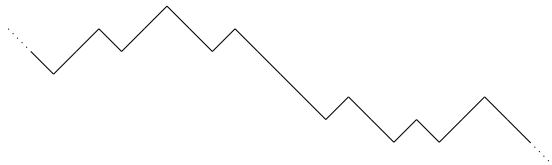
Références

- chaque $Z^{k,k}(v)$ est modifié un nombre fini de fois p.s.

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}

- chaque $Z^{k,k}(v)$ est modifié un nombre fini de fois p.s.

Codage des états



Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

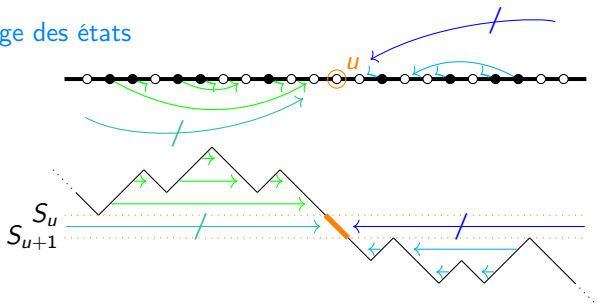
Loi de T^L

Conclusion

Références

- chaque $Z^{k,k}(v)$ est modifié un nombre fini de fois p.s.

Codage des états

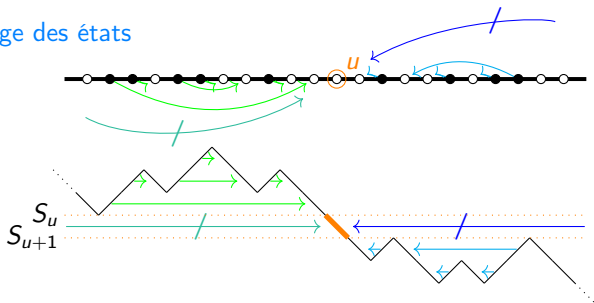



ne voit aucune arête $\implies u$ ne reçoit aucune balle

Bonne définition du modèle sur \mathbb{Z}


- chaque $Z^{k,k}(v)$ est modifié un nombre fini de fois p.s.

Codage des états



 ne voit aucune arête $\implies u$ ne reçoit aucune balle

Proposition

Il existe une infinité de  p.s. (à droite et à gauche de tout sommet).

Si on définit $N = \#\{ \text{red diagonal line} \}$, alors pour tout n , $\mathbb{P}(N \geq n) = 1$.

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

La loi de \mathcal{T}^L sur \mathbb{Z}

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

On note $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{i \in \mathbb{Z}}$ le processus qui indexe les distances inter-trous libres.

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $(L_i^{(\lambda)})_{i \in \mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_i \mathcal{T}^L = 2b_i, -R \leq i \leq R) &= \prod_{i=-R}^R \mathbb{P}(L_i^{(\lambda)} = 2b_i) \\ &= \frac{(2b_0 + 1)\lambda^{2b_0} C_{b_0}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i \neq 0}^R \frac{\lambda^{2b_i} C_{b_i}}{\mathcal{G}(\lambda)} \end{aligned}$$

La loi de \mathcal{T}^L sur \mathbb{Z}

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

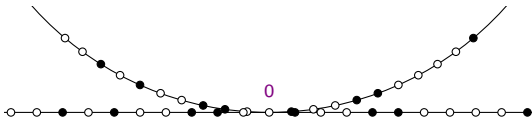
On note $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{i \in \mathbb{Z}}$ le processus qui indexe les distances inter-trous libres.

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $(L_i^{(\lambda)})_{i \in \mathbb{Z}}$ (explicités) tels que pour tout $R > 0$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\Delta_i \mathcal{T}^L = 2b_i, -R \leq i \leq R) &= \prod_{i=-R}^R \mathbb{P}(L_i^{(\lambda)} = 2b_i) \\ &= \frac{(2b_0 + 1)\lambda^{2b_0} C_{b_0}}{\mathcal{H}(\lambda)} \prod_{i=-R, i \neq 0}^R \frac{\lambda^{2b_i} C_{b_i}}{\mathcal{G}(\lambda)} \end{aligned}$$

Clé de la preuve : couplage avec le cercle



$$\frac{N_{\mathbf{b}}(n)}{n} \rightarrow d_{\mathbf{b}}, \quad \frac{N_{\mathbf{t}}(n)}{n} \rightarrow d_{\mathbf{t}}$$

environnement local
similaire + suffisant

Preuve du théorème

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Soient $R > 0$, $\epsilon > 0$.

■ Sur \mathbb{Z} : l'environnement local autour de 0 est suffisant p.s. :

$$\exists M > 0 : \mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p} \left(\begin{array}{c} \text{il y a } R + 2 \text{ trous à gauche et à droite de } 0 \\ \text{dans l'intervalle } [-M, M] \end{array} \right) > 1 - \epsilon.$$

donc avec proba $\geq 1 - \epsilon$, les $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{-R \leq i \leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M, M]$.

Preuve du théorème

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Soient $R > 0$, $\epsilon > 0$.

■ **Sur \mathbb{Z} : l'environnement local autour de 0 est suffisant p.s. :**

$$\exists M > 0 : \mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, \rho} \left(\begin{array}{c} \text{il y a } R + 2 \text{ trous à gauche et à droite de } 0 \\ \text{dans l'intervalle } [-M, M] \end{array} \right) > 1 - \epsilon.$$

donc avec proba $\geq 1 - \epsilon$, les $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{-R \leq i \leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M, M]$.

■ **Sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n assez grand : un intervalle suffit également**

Preuve du théorème

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Soient $R > 0$, $\epsilon > 0$.

- **Sur \mathbb{Z} : l'environnement local autour de 0 est suffisant p.s. :**

$$\exists M > 0 : \mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, p} \left(\begin{array}{c} \text{il y a } R + 2 \text{ trous à gauche et à droite de } 0 \\ \text{dans l'intervalle } [-M, M] \end{array} \right) > 1 - \epsilon.$$

donc avec proba $\geq 1 - \epsilon$, les $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{-R \leq i \leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M, M]$.

- **Sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n assez grand : un intervalle suffit également**
- **Il existe un couplage des configurations locales initiales sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec proba $\geq 1 - \epsilon$, pour n assez grand)**

$$\text{clé : } \frac{N_b(n)}{n} \rightarrow d_b, \frac{N_t(n)}{n} \rightarrow d_t$$

Preuve du théorème

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Soient $R > 0$, $\epsilon > 0$.

- **Sur \mathbb{Z} : l'environnement local autour de 0 est suffisant p.s. :**

$$\exists M > 0 : \mathbb{P}^{\mathbb{Z}, d_b, d_t, \rho} \left(\begin{array}{c} \text{il y a } R + 2 \text{ trous à gauche et à droite de } 0 \\ \text{dans l'intervalle } [-M, M] \end{array} \right) > 1 - \epsilon.$$

donc avec proba $\geq 1 - \epsilon$, les $(\Delta_i \mathcal{T}^L)_{-R \leq i \leq R}$ ne dépendent que de la configuration initiale sur $[-M, M]$.

- **Sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, pour n assez grand : un intervalle suffit également**
- **Il existe un couplage des configurations locales initiales sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ (avec proba $\geq 1 - \epsilon$, pour n assez grand)**
clé : $\frac{N_b(n)}{n} \rightarrow d_b, \frac{N_t(n)}{n} \rightarrow d_t$
- **on peut donc coupler les trajectoires des balles autour de 0 sur \mathbb{Z} et sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

$$\text{avec probabilité } \geq 1 - 2\epsilon, \forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} = \Delta_i \mathcal{T}^L.$$

Suite de la preuve

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

avec probabilité $\geq 1 - 2\epsilon$, $\forall i \in [-R, R], \Delta_i T^{L(n)} = \Delta_i T^L$

Suite de la preuve

avec probabilité $\geq 1 - 2\epsilon$, $\forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathbf{T}^{L^{(n)}} = \Delta_i \mathbf{T}^L$

- On a égalité des lois suivantes :

$$\mathcal{L} \left(\left(\Delta_i \mathbf{T}^{L^{(n)}} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \right) = \mathcal{L} \left(\left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \mid \sum \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right)$$

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

Suite de la preuve

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

avec probabilité $\geq 1 - 2\epsilon$, $\forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} = \Delta_i \mathcal{T}^L$

- On a égalité des lois suivantes :

$$\mathcal{L} \left(\left(\Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \right) = \mathcal{L} \left(\left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \mid \sum \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right)$$

- Et ce conditionnement par la somme est asymptotiquement négligeable :

$$\mathbb{P} \left(\Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i)$$

Suite de la preuve

Un système de particules : le modèle de golf sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de \mathcal{T}^L sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de \mathcal{T}^L

Conclusion

Références

avec probabilité $\geq 1 - 2\epsilon$, $\forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} = \Delta_i \mathcal{T}^L$

- On a égalité des lois suivantes :

$$\mathcal{L} \left(\left(\Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \right) = \mathcal{L} \left(\left(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} \right)_{i \in I_{N_\ell}} \mid \sum \mathbf{L}_i^{(\lambda)} = n - N_\ell \right)$$

- Et ce conditionnement par la somme est asymptotiquement négligeable :

$$\mathbb{P} \left(\Delta_i \mathcal{T}^{L(n)} = 2b_i, -R \leq i \leq R-1 \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \prod_{i=-R}^{R-1} \mathbb{P}(\mathbf{L}_i^{(\lambda)} = 2b_i)$$

- Conclusion :

avec probabilité $\geq 1 - 3\epsilon$, $\forall i \in [-R, R], \Delta_i \mathcal{T}^L = \mathbf{L}_i^{(\lambda)}$.

Résultat final

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

Théorème

Il existe $\mathcal{G}, \mathcal{H}, \lambda$ et $(L_i^{(\lambda)})_{i \in \mathbb{Z}}$ (explicites) tels que pour tout $R > 0$,

$$\mathbb{P}(\Delta_i T^L = 2b_i, -R \leq i \leq R) = \prod_{i=-R}^R \mathbb{P}(L_i^{(\lambda)} = 2b_i)$$

Bilan et travail en cours

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références

- Extension sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
 - plusieurs balles par sommets : ok
 - trous à capacité plus grande que 1 ?
- calcul de la distance parcourue par une balle ? (asymptotique dans [PRS19])

Références

Un système de
particules : le
modèle de golf
sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et sur
 \mathbb{Z}

Zoé Varin

Introduction

Loi de T^L sur
 $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sur \mathbb{Z}

Définition

Loi de T^L

Conclusion

Références



Persi Diaconis and William Fulton, *A growth model, a game, an algebra, Lagrange inversion, and characteristic classes*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **49** (1991), no. 1, 95–119.



Gregory F Lawler, Maury Bramson, and David Griffeath, *Internal diffusion limited aggregation*, The Annals of Probability (1992), 2117–2140.



Philippe Nadeau and Vasu Tewari, *Remixed eulerian numbers*, 2022.



Michał Przykucki, Alexander Roberts, and Alex Scott, *Parking on the integers*, 2019.

crédit



: Vecteezy.com