

Equations de groupes de renormalisation de tout ordre

Loïc Foissy

Bordeau, 27 février 2023

L'algèbre de Hopf \mathcal{H}_{CK} des arbres enracinés de Connes et Kreimer est l'algèbre associative, commutative librement engendrée par l'ensemble des arbres enracinés décorés. Une base de \mathcal{H}_{CK} est donnée par l'ensemble des forêts :

$$1, \bullet, \dots, \text{I}, \dots, \text{I}, \dots, \text{V}, \text{I}, \dots, \text{I}, \dots, \text{I}, \text{I}, \text{V}, \dots, \text{I}, \dots, \text{V}, \text{V}, \text{V}, \text{Y}, \text{I}, \dots$$

Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta(t) = \sum_{c \text{ coupe admissible}} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

coupe c									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$W^c(t)$									
$R^c(t)$									1
$P^c(t)$	1								

$$\Delta(\text{tree}) = \text{tree} \otimes 1 + 1 \otimes \text{tree} + \text{line} \otimes \text{line} + \text{root-child} \otimes \text{root-child} + \text{root-child} \otimes \text{line} + \text{line} \otimes \text{root-child} + \dots \otimes \text{line}.$$

L'opérateur de greffe de \mathcal{H}_{CK} est l'opérateur $B^+ : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathcal{H}_{CK}$, associant à une forêt $t_1 \dots t_n$ l'arbre obtenu en greffant t_1, \dots, t_n sur une racine commune. Par exemple :

$$B^+(\bullet) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \vee \end{array} .$$

Pour tout $x \in \mathcal{H}_{CK}$:

$$\Delta \circ B^+(x) = B^+(x) \otimes 1 + (Id \otimes B^+) \circ \Delta(x),$$

ce qui signifie que B^+ est un 1-cocycle pour l'homologie de Cartier-Quillen, duale de l'homologie de Hochschild.

Propriété universelle

Soit A une algèbre de Hopf commutative et soit $L : A \longrightarrow A$ tel que pour tout $a \in A$:

$$\Delta \circ L(a) = L(a) \otimes 1 + (Id \otimes L) \circ \Delta(a).$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf $\phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow A$ tel que $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$.

L'algèbre des polynômes à une indéterminée $\mathbb{K}[L]$ est une algèbre de Hopf, avec le coproduit défini par

$$\Delta(L) = L \otimes 1 + 1 \otimes L.$$

Pour tout polynôme P , en identifiant $\mathbb{K}[L_1, L_2]$ et $\mathbb{K}[L] \otimes \mathbb{K}[L]$,

$$\Delta(P)(L_1, L_2) = P(L_1 + L_2).$$

Règles de Feynman

Une règle de Feynman est un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow \mathbb{K}[L].$$

Un exemple de règle de Feynman

Pour tout forêt F ,

$$\phi_0(F) = \frac{1}{F!} X^{|V(F)|},$$

où le coefficient $F!$ est donné par

$$F! = \prod_{v \in V(F)} |\{w \in V(F) \mid w \geq_F v\}|.$$

t	.	⋮	∨	⋮	∩	⋮	∨	⋮
$t!$	1	2	3	6	4	8	8	24

Lemme

Soit $\sigma : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathbb{K}$ un caractère infinitésimal. Alors

$$\phi(F) = \sum_{S \subseteq E(F)} \left(\prod_{t \in (F \setminus S)} \sigma(t) \right) \phi_0(F/(F \setminus S))$$

définit une règle de Feynman. On obtient ainsi toutes les règles de Feynman.

$$\phi(\cdot) = \sigma(\cdot)\cdot,$$

$$\phi(\text{!}) = \sigma(\text{!})X + \sigma(\cdot) \frac{X^2}{2},$$

Lemme

Soit $\sigma : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathbb{K}$ un caractère infinitésimal. Alors

$$\phi(F) = \sum_{S \subseteq E(F)} \left(\prod_{t \in (F \setminus S)} \sigma(t) \right) \phi_0(F / (F \setminus S))$$

définit une règle de Feynman. On obtient ainsi toutes les règles de Feynman.

$$\phi(\text{V}) = \sigma(\text{V})X + 2\sigma(\text{!})\sigma(\cdot) \frac{X^2}{2} + \sigma(\cdot^3) \frac{X^2}{3},$$

$$\phi(\text{!}) = \sigma(\text{V})X + 2\sigma(\text{!})\sigma(\cdot) \frac{X^2}{2} + \sigma(\cdot^3) \frac{X^2}{6}.$$

Soit $f \in \mathbb{K}[[x]]$ une série formelle de terme constant 1.
L'équation de Dyson-Schwinger combinatoire associée est

$$X(x) = xB^+(f(X(x))),$$

où $X(x) \in \mathcal{H}_{CK}[[x]]$.

Proposition

Cette équation possède une unique solution

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n x^n \in \mathcal{H}_{CK}[[x]].$$

Pour tout n , X_n est une combinaison linéaire d'arbres de degré n .

En notant b_n les coefficients de f ,

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = b_1 \downarrow,$$

$$X_3 = b_1^2 \downarrow\downarrow + b_2 \vee,$$

$$X_4 = b_1^3 \downarrow\downarrow\downarrow + b_1 b_2 \downarrow\vee + 2b_2 b_1 \vee\downarrow + b_3 \vee\vee.$$

La sous-algèbre engendrée par les X_n , $n \geq 1$ est notée A_f .

Question

La sous-algèbre A_f est-elle de Hopf ?

Théorème (LF, 2010)

La sous-algèbre A_f est de Hopf si et seulement si il existe $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$ tel que :

- $f = 1$ si $(\alpha, \beta) = (0, 0)$.
- $f = e^{\alpha x}$ si $\beta = 0$.
- $f = (1 - \alpha\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}$ si $\alpha\beta \neq 0$.

Autrement dit,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1(1+\beta) \dots (1+\beta(n-1))}{n!} \alpha^n x^n.$$

Exemples

Pour $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$, $f = 1 + x$ et X_n est l'échelle de degré n .

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \downarrow,$$

$$X_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}.$$

Exemples

Pour $(\alpha, \beta) = (1, 1)$, $f = \frac{1}{1-x}$ et le coefficient de t dans $X(x)$ est le nombre de ses plongements dans le plan.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \begin{array}{c} | \\ \bullet \end{array},$$

$$X_3 = \begin{array}{c} | \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ | \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ \vee \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ | \\ \vee \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} | \\ \vee \\ \vee \\ \vee \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \vee \\ \vee \\ \vee \\ \bullet \end{array}.$$

On fixe une règle de Feynman. La fonction de Green associée à l'équation de Dyson-Schwinger combinatoire

$$X(x) = xB^+(f(X))$$

est

$$G(x, L) = \phi(X(x)) \in \mathbb{K}[[x, L]].$$

Pour des raisons physiques, il est souhaité que $G(x, L)$ vérifie l'équation du groupe de renormalisation :

$$\left(\frac{\partial}{\partial L} + \beta(x) \frac{\partial}{\partial x} - \gamma(x) \right) G(x, L) = 0,$$

où β et γ sont des séries formelles.

Question

Quelles sont les équations de Dyson-Schwinger combinatoires et les règles de Feynman donnant des fonctions de Green vérifiant l'équation du groupe de renormalisation ?

On connaît d'autres sous-algèbres de Hopf de \mathcal{H}_{CK} généralisant les A_f :

Cadre

Une série admissible est une série

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n x^n \in \mathcal{H}_{CK}[[x]],$$

telle que pour tout n , X_n est une combinaison linéaire d'arbres à n sommets. On suppose que la sous-algèbre A_X engendrée par les X_n est une sous-algèbre de Hopf.

Les solutions des équations de Dyson-Schwinger précédentes fournissent ce genre de série formelle.

Autre exemple : la sous-algèbre de Connes-Moscovici.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array},$$

$$X_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 6 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}.$$

Le coefficient de t dans $X(x)$ est le nombre d'ordre en tas de t .

Autre exemple : les corolles.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \text{!},$$

$$X_3 = \text{V},$$

$$X_4 = \text{V},$$

$$X_5 = \text{•} \text{---} \text{V} \text{---} \text{•}.$$

Un exemple plus exotique :

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array},$$

$$X_3 = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagdown \quad \diagup \\ \bullet \end{array}.$$

Équation de groupe de renormalisation généralisée

Soit $X(x)$ une série admissible, ϕ une règle de Feynman et $G(x, L) = \phi(X(x))$ la fonction de Green associée. On dit que $G(x, L)$ vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée si

$$\frac{\partial G}{\partial L} = \beta \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, L) + \gamma_0(x),$$

où $\beta \left(x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \in \mathbb{K} \left[\left[x, \frac{\partial}{\partial x} \right] \right]$ et $\gamma_0(x)$ est une série formelle. Le degré de cette équation est le degré de β en $\frac{\partial}{\partial x}$.

Définition

Si pour toute règle de Feynman, la fonction de Green associée à la série admissible $X(x)$ vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre $\leq N$, on dit que $X(x)$ est une suite admissible forte d'ordre $\leq N$.

Soit $X(x)$ une série admissible. Pour tout n , étant donnée la forme du coproduit,

$$\Delta(X_n) = X_n \otimes 1 + 1 \otimes X_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i(n) \otimes X(i),$$

où $Y_i(n)$ est un polynôme en X_1, \dots, X_{n-1} , homogène de degré $n - i$. En particulier, le coefficient de $X(j) \otimes X(i)$ dans $X(i + j)$ est noté $\lambda_{i,j}$.

Pour Connes-Moscovici, $\lambda_{i,j} = \binom{i+j}{j-1}$.

				1					
					1		2		
			1		3		3		
		1		4		6		4	
	1		5		10		10		5
					⋮				

Pour les équations de Dyson-Schwinger, en supposant $\alpha = 1$,
 $\lambda_{i,j} = i(1 + \beta) - \beta$.

Pour $i + j = n$, on pose

$$c_{n,i} = \lambda_{n-i,i} \sigma(t_{n-i}).$$

Lemme

La fonction de Green vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre $\leq N$ si et seulement si, pour tout n , $(c_{n,i})_{i \geq 1}$ est une suite polynomiale en i , de degré $\leq N$ en i .

Lemme

La suite admissible $X(x)$ est forte d'ordre N si et seulement si dans le tableau des $\lambda_{i,j}$, les diagonales \swarrow sont des suites polynomiales de degré $\leq N$ et la première diagonale \swarrow est une suite polynomiale d'ordre N .

Exemples

- La série des échelles est forte d'ordre 0.
- La série des corolles est forte d'ordre 1.
- La série associée à une équation de Dyson-Schwinger combinatoire est forte d'ordre ≤ 1 .
- La série de Connes-Moscovici n'est pas forte.

Quelles propriétés vérifient les suites $(\lambda_{i,j})_{i,j \geq 1}$?

Définition- et Proposition

Un Λ -tableau est une suite $(\lambda_{i,j})_{i,j \geq 1}$ telle que

- (Relation pré-Lie). Pour tous $i, j, k \geq 1$,

$$\lambda_{i,j} \lambda_{i+j,k} - \lambda_{j,k} \lambda_{i,j+k} = \lambda_{i,k} \lambda_{i+k,j} - \lambda_{k,j} \lambda_{i,j+k}.$$

- (Non dégénérescence). Pour tout $n \geq 2$, il existe $i, j \geq 1$ tel que $i + j = n$ et $\lambda_{i,j} \neq 0$.

Les suites admissibles sont en bijection avec l'ensemble des Λ -tableaux.

Idée de la preuve

Si $X(x)$ est une suite admissible, la sous-algèbre A_X est une algèbre de Hopf graduée combinatoire gauche, au sens de Loday et Ronco. Ses générateurs forment une cogèbre pré-lie, dont les coefficients de structure sont les $\lambda_{i,j}$.

Si $(\lambda_{i,j})$ est un Λ -tableau, il s'agit des coefficients de structure d'une algèbre pré-Lie graduée, de dimension 1 par degré, engendrée en degré 1. Par suite, il s'agit d'un quotient de l'algèbre pré-Lie des arbres enracinés (Chapoton et Livernet). De façon duale, (Panaite, Hoffman, Guin-Oudom), on obtient une sous-algèbre de \mathcal{H}_{CK} de la forme A_X .

En combinant ces relations et à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

Théorème

Les suites admissibles fortes d'ordre 0 sont, à une normalisation près, associée aux Λ -tableaux suivants :

- Pour tous $i, j \geq 1$, $\lambda_{i,j} = 1$ (cas des échelles).
- Il existe $n \geq 1$, $b \neq 1$ tels que pour tous $i, j \geq 1$,

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i < n, \\ b & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

Théorème

La classification des suites admissibles fortes d'ordre 1 comporte 5 cas, dont les deux cas particuliers

$$(A) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} a_1 i + b & \text{si } j = 1, \\ a_2 i + b & \text{si } j = 2, \\ \frac{a_1 a_2 i}{(j-1)a_1 - (j-2)a_2} + b & \text{si } j \geq 3; \end{cases}$$

$$(E) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} a_1 i + b & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas (A) comporte le cas des équations de Dyson-Schwinger combinatoires, lorsque $a_1 = a_2$. Le cas (E) comporte le cas des corolles, lorsque $a_1 = 1$ et $b = 0$.

Théorème

À une normalisation près, la seule suite admissible d'ordre $k \geq 2$ correspond au Λ -tableau donné par

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} (j+1)^k & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite correspondante est

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!^{k+1} c_n,$$

où c_n est la n -ième corolle.

Définition

Si pour une certaine règle de Feynman non dégénérée, la fonction de Green associée à la série admissible $X(x)$ vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre $\leq N$, on dit que $X(x)$ est une suite admissible faible d'ordre $\leq N$.

La caractérisation des suites faibles est beaucoup plus difficile, à cause de l'annulation possible des coefficients $\sigma(X_n)$.
Néanmoins, on peut caractériser les suites admissibles faibles telles que pour tous $i, j \geq 1$, $\lambda_{i,j} \in \{0, 1\}$ et $\lambda_{i,1} = 1$.

Théorème

La classification de ces suites donnent 4 cas :

- Pour tous $i, j \geq 1$, $\lambda_{i,j} = 1$.
- Cas $A(m)$: il existe $m \geq 2$ tel que $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La caractérisation des suites faibles est beaucoup plus difficile, à cause de l'annulation possible des coefficients $\sigma(X_n)$. Néanmoins, on peut caractériser les suites admissibles faibles telles que pour tous $i, j \geq 1$, $\lambda_{1,j} \in \{0, 1\}$ et $\lambda_{i,1} = 1$.

Théorème

La classification de ces suites donnent 4 cas :

- Cas $B(m)$: il existe $m \geq 2$ tel que $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 - i & \text{si } m \mid j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Cas $C(m)$: il existe $m \geq 2$ tel que $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 - i & \text{si } j = m, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Merci pour votre attention !