

# Equations de groupes de renormalisation de tout ordre

Loïc Foissy


































Bordeau, 27 février 2023

L'algèbre de Hopf  $\mathcal{H}_{CK}$  des arbres enracinés de Connes et Kreimer est l'algèbre associative, commutative librement engendrée par l'ensemble des arbres enracinés décorés. Une base de  $\mathcal{H}_{CK}$  est donnée par l'ensemble des forêts :

$$1, \bullet, \dots, \text{I}, \dots, \text{I}, \dots, \text{V}, \text{I}, \dots, \text{I}, \dots, \text{I}, \text{I}, \text{V}, \dots, \text{I}, \dots, \text{V}, \text{V}, \text{V}, \text{Y}, \text{I}, \dots$$

Le coproduit est donné par les coupes admissibles :

$$\Delta(t) = \sum_{c \text{ coupe admissible}} P^c(t) \otimes R^c(t).$$

coupe $c$									totale
Admissible ?	oui	oui	oui	oui	non	oui	oui	non	oui
$W^c(t)$									
$R^c(t)$									1
$P^c(t)$	1								

$$\Delta(\text{tree}) = \text{tree} \otimes 1 + 1 \otimes \text{tree} + \text{tree} \otimes \text{tree} + \dots$$

L'opérateur de greffe de  $\mathcal{H}_{CK}$  est l'opérateur  $B^+ : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathcal{H}_{CK}$ , associant à une forêt  $t_1 \dots t_n$  l'arbre obtenu en greffant  $t_1, \dots, t_n$  sur une racine commune. Par exemple :

$$B^+(\bullet) = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \vee \end{array} .$$

Pour tout  $x \in \mathcal{H}_{CK}$  :

$$\Delta \circ B^+(x) = B^+(x) \otimes 1 + (Id \otimes B^+) \circ \Delta(x),$$

ce qui signifie que  $B^+$  est un 1-cocycle pour l'homologie de Cartier-Quillen, duale de l'homologie de Hochschild.

## Propriété universelle

Soit  $A$  une algèbre de Hopf commutative et soit  $L : A \longrightarrow A$  tel que pour tout  $a \in A$  :

$$\Delta \circ L(a) = L(a) \otimes 1 + (Id \otimes L) \circ \Delta(a).$$

Alors il existe un unique morphisme d'algèbres de Hopf  $\phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow A$  tel que  $\phi \circ B^+ = L \circ \phi$ .

L'algèbre des polynômes à une indéterminée  $\mathbb{K}[L]$  est une algèbre de Hopf, avec le coproduit défini par

$$\Delta(L) = L \otimes 1 + 1 \otimes L.$$

Pour tout polynôme  $P$ , en identifiant  $\mathbb{K}[L_1, L_2]$  et  $\mathbb{K}[L] \otimes \mathbb{K}[L]$ ,

$$\Delta(P)(L_1, L_2) = P(L_1 + L_2).$$

## Règles de Feynman

Une règle de Feynman est un morphisme d'algèbres de Hopf

$$\phi : \mathcal{H}_{CK} \longrightarrow \mathbb{K}[L].$$

## Un exemple de règle de Feynman

Pour tout forêt  $F$ ,

$$\phi_0(F) = \frac{1}{F!} X^{|V(F)|},$$

où le coefficient  $F!$  est donné par

$$F! = \prod_{v \in V(F)} |\{w \in V(F) \mid w \geq_F v\}|.$$

$t$	.	⋮	∨	⋮	∩	⋮	∨	⋮
$t!$	1	2	3	6	4	8	8	24

## Lemme

Soit  $\sigma : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathbb{K}$  un caractère infinitésimal. Alors

$$\phi(F) = \sum_{S \subseteq E(F)} \left( \prod_{t \in (F \setminus S)} \sigma(t) \right) \phi_0(F/(F \setminus S))$$

définit une règle de Feynman. On obtient ainsi toutes les règles de Feynman.

$$\phi(\cdot) = \sigma(\cdot)\cdot,$$

$$\phi(\text{!}) = \sigma(\text{!})X + \sigma(\cdot) \frac{X^2}{2},$$



## Lemme

Soit  $\sigma : \mathcal{H}_{CK} \rightarrow \mathbb{K}$  un caractère infinitésimal. Alors

$$\phi(F) = \sum_{S \subseteq E(F)} \left( \prod_{t \in (F \setminus S)} \sigma(t) \right) \phi_0(F / (F \setminus S))$$

définit une règle de Feynman. On obtient ainsi toutes les règles de Feynman.

$$\phi(\text{V}) = \sigma(\text{V})X + 2\sigma(\text{!})\sigma(\cdot) \frac{X^2}{2} + \sigma(\cdot^3) \frac{X^2}{3},$$

$$\phi(\text{!}) = \sigma(\text{V})X + 2\sigma(\text{!})\sigma(\cdot) \frac{X^2}{2} + \sigma(\cdot^3) \frac{X^2}{6}.$$

Soit  $f \in \mathbb{K}[[x]]$  une série formelle de terme constant 1.  
L'équation de Dyson-Schwinger combinatoire associée est

$$X(x) = xB^+(f(X(x))),$$

où  $X(x) \in \mathcal{H}_{CK}[[x]]$ .

### Proposition

Cette équation possède une unique solution

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n x^n \in \mathcal{H}_{CK}[[x]].$$

Pour tout  $n$ ,  $X_n$  est une combinaison linéaire d'arbres de degré  $n$ .

En notant  $b_n$  les coefficients de  $f$ ,

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = b_1 \downarrow,$$

$$X_3 = b_1^2 \downarrow\downarrow + b_2 \vee,$$

$$X_4 = b_1^3 \downarrow\downarrow\downarrow + b_1 b_2 \downarrow\vee + 2b_2 b_1 \downarrow\downarrow + b_3 \vee\vee.$$

La sous-algèbre engendrée par les  $X_n$ ,  $n \geq 1$  est notée  $A_f$ .

### Question

La sous-algèbre  $A_f$  est-elle de Hopf ?

## Théorème (LF, 2010)

La sous-algèbre  $A_f$  est de Hopf si et seulement si il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{K}^2$  tel que :

- $f = 1$  si  $(\alpha, \beta) = (0, 0)$ .
- $f = e^{\alpha x}$  si  $\beta = 0$ .
- $f = (1 - \alpha\beta x)^{-\frac{1}{\beta}}$  si  $\alpha\beta \neq 0$ .

Autrement dit,

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1(1+\beta) \dots (1+\beta(n-1))}{n!} \alpha^n x^n.$$

## Exemples

Pour  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$ ,  $f = 1 + x$  et  $X_n$  est l'échelle de degré  $n$ .

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \downarrow,$$

$$X_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ \vdots \\ \bullet \end{array}.$$

## Exemples

Pour  $(\alpha, \beta) = (1, 1)$ ,  $f = \frac{1}{1-x}$  et le coefficient de  $t$  dans  $X(x)$  est le nombre de ses plongements dans le plan.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \text{!},$$

$$X_3 = \text{!} + 2 \text{V},$$

$$X_4 = \text{!} + \text{Y} + 2 \text{V} + \text{W},$$

$$X_5 = \text{!} + \text{!} + 2 \text{V} + \text{W} + 2 \text{V} + 2 \text{V} + 2 \text{V} + 3 \text{W} + \text{!}.$$

On fixe une règle de Feynman. La fonction de Green associée à l'équation de Dyson-Schwinger combinatoire

$$X(x) = xB^+(f(X))$$

est

$$G(x, L) = \phi(X(x)) \in \mathbb{K}[[x, L]].$$

Pour des raisons physiques, il est souhaité que  $G(x, L)$  vérifie l'équation du groupe de renormalisation :

$$\left( \frac{\partial}{\partial L} + \beta(x) \frac{\partial}{\partial x} - \gamma(x) \right) G(x, L) = 0,$$

où  $\beta$  et  $\gamma$  sont des séries formelles.



## Question

Quelles sont les équations de Dyson-Schwinger combinatoires et les règles de Feynman donnant des fonctions de Green vérifiant l'équation du groupe de renormalisation ?

On connaît d'autres sous-algèbres de Hopf de  $\mathcal{H}_{CK}$  généralisant les  $A_f$  :

### Cadre

Une série admissible est une série

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n x^n \in \mathcal{H}_{CK}[[x]],$$

telle que pour tout  $n$ ,  $X_n$  est une combinaison linéaire d'arbres à  $n$  sommets. On suppose que la sous-algèbre  $A_X$  engendrée par les  $X_n$  est une sous-algèbre de Hopf.

Les solutions des équations de Dyson-Schwinger précédentes fournissent ce genre de série formelle.

Autre exemple : la sous-algèbre de Connes-Moscovici.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array},$$

$$X_3 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 3 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 6 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

Le coefficient de  $t$  dans  $X(x)$  est le nombre d'ordre en tas de  $t$ .

Autre exemple : les corolles.

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \text{!},$$

$$X_3 = \text{V},$$

$$X_4 = \text{V},$$

$$X_5 = \text{•} \text{---} \text{V} \text{---} \text{•}.$$

Un exemple plus exotique :

$$X_1 = \bullet,$$

$$X_2 = \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \end{array},$$

$$X_3 = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

$$X_4 = 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array},$$

$$X_5 = 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ | \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ | \\ \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 2 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} - 4 \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array} + \begin{array}{c} \bullet \\ \diagup \quad \diagdown \\ \bullet \end{array}.$$

## Équation de groupe de renormalisation généralisée

Soit  $X(x)$  une série admissible,  $\phi$  une règle de Feynman et  $G(x, L) = \phi(X(x))$  la fonction de Green associée. On dit que  $G(x, L)$  vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée si

$$\frac{\partial G}{\partial L} = \beta \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) G(x, L) + \gamma_0(x),$$

où  $\beta \left( x, \frac{\partial}{\partial x} \right) \in \mathbb{K} \left[ \left[ x, \frac{\partial}{\partial x} \right] \right]$  et  $\gamma_0(x)$  est une série formelle. Le degré de cette équation est le degré de  $\beta$  en  $\frac{\partial}{\partial x}$ .

## Définition

Si pour toute règle de Feynman, la fonction de Green associée à la série admissible  $X(x)$  vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre  $\leq N$ , on dit que  $X(x)$  est une suite admissible forte d'ordre  $\leq N$ .

Soit  $X(x)$  une série admissible. Pour tout  $n$ , étant donnée la forme du coproduit,

$$\Delta(X_n) = X_n \otimes 1 + 1 \otimes X_n + \sum_{i=1}^{n-1} Y_i(n) \otimes X(i),$$

où  $Y_i(n)$  est un polynôme en  $X_1, \dots, X_{n-1}$ , homogène de degré  $n - i$ . En particulier, le coefficient de  $X(j) \otimes X(i)$  dans  $X(i + j)$  est noté  $\lambda_{i,j}$ .



Les coefficients  $\lambda_{i,j}$  sont stockés sous la forme

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & \lambda_{1,1} & & & & \\
 & & & & & \lambda_{1,2} & & & \\
 & & & \lambda_{2,1} & & & \lambda_{1,3} & & \\
 & & \lambda_{3,1} & & \lambda_{2,2} & & & \lambda_{4,1} & \\
 & \lambda_{4,1} & & \lambda_{3,2} & & \lambda_{2,3} & & & \lambda_{5,1} \\
 \lambda_{5,1} & & \lambda_{4,2} & & \lambda_{3,3} & & \lambda_{4,2} & & \\
 & & & & \vdots & & & & 
 \end{array}$$



Pour les corolles :

$$\begin{array}{cccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & & 2 & & 0 & & \\ & & & 3 & & 0 & & 0 & \\ & & 4 & & 0 & & 0 & & 0 & \\ 5 & & & 0 & & 0 & & 0 & & 0 \\ & & & & \vdots & & & & & \end{array}$$

Pour Connes-Moscovici,  $\lambda_{i,j} = \binom{i+j}{j-1}$ .

				1					
					1		2		
			1		3		3		
		1		4		6		4	
	1		5		10		10		5
					⋮				

Pour les équations de Dyson-Schwinger, en supposant  $\alpha = 1$ ,  
 $\lambda_{i,j} = i(1 + \beta) - \beta$ .

Pour  $i + j = n$ , on pose

$$c_{n,i} = \lambda_{n-i,i} \sigma(t_{n-i}).$$

### Lemme

La fonction de Green vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre  $\leq N$  si et seulement si, pour tout  $n$ ,  $(c_{n,i})_{i \geq 1}$  est une suite polynomiale en  $i$ , de degré  $\leq N$  en  $i$ .

## Lemme

La suite admissible  $X(x)$  est forte d'ordre  $N$  si et seulement si dans le tableau des  $\lambda_{i,j}$ , les diagonales  $\swarrow$  sont des suites polynomiales de degré  $\leq N$  et la première diagonale  $\swarrow$  est une suite polynomiale d'ordre  $N$ .

## Exemples

- La série des échelles est forte d'ordre 0.
- La série des corolles est forte d'ordre 1.
- La série associée à une équation de Dyson-Schwinger combinatoire est forte d'ordre  $\leq 1$ .
- La série de Connes-Moscovici n'est pas forte.

Quelles propriétés vérifient les suites  $(\lambda_{i,j})_{i,j \geq 1}$  ?

### Définition- et Proposition

Un  $\Lambda$ -tableau est une suite  $(\lambda_{i,j})_{i,j \geq 1}$  telle que

- (Relation pré-Lie). Pour tous  $i, j, k \geq 1$ ,

$$\lambda_{i,j} \lambda_{i+j,k} - \lambda_{j,k} \lambda_{i,j+k} = \lambda_{i,k} \lambda_{i+k,j} - \lambda_{k,j} \lambda_{i,j+k}.$$

- (Non dégénérescence). Pour tout  $n \geq 2$ , il existe  $i, j \geq 1$  tel que  $i + j = n$  et  $\lambda_{i,j} \neq 0$ .

Les suites admissibles sont en bijection avec l'ensemble des  $\Lambda$ -tableaux.



## Idée de la preuve

Si  $X(x)$  est une suite admissible, la sous-algèbre  $A_X$  est une algèbre de Hopf graduée combinatoire gauche, au sens de Loday et Ronco. Ses générateurs forment une cogèbre pré-lie, dont les coefficients de structure sont les  $\lambda_{i,j}$ .

Si  $(\lambda_{i,j})$  est un  $\Lambda$ -tableau, il s'agit des coefficients de structure d'une algèbre pré-Lie graduée, de dimension 1 par degré, engendrée en degré 1. Par suite, il s'agit d'un quotient de l'algèbre pré-Lie des arbres enracinés (Chapoton et Livernet). De façon duale, (Panaite, Hoffman, Guin-Oudom), on obtient une sous-algèbre de  $\mathcal{H}_{CK}$  de la forme  $A_X$ .

En combinant ces relations et à l'aide d'un logiciel de calcul formel, on obtient :

## Théorème

Les suites admissibles fortes d'ordre 0 sont, à une normalisation près, associée aux  $\Lambda$ -tableaux suivants :

- Pour tous  $i, j \geq 1$ ,  $\lambda_{i,j} = 1$  (cas des échelles).
- Il existe  $n \geq 1$ ,  $b \neq 1$  tels que pour tous  $i, j \geq 1$ ,

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i < n, \\ b & \text{si } i = n, \\ 0 & \text{si } i > n. \end{cases}$$

## Théorème

La classification des suites admissibles fortes d'ordre 1 comporte 5 cas, dont les deux cas particuliers

$$(A) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} a_1 i + b & \text{si } j = 1, \\ a_2 i + b & \text{si } j = 2, \\ \frac{a_1 a_2 i}{(j-1)a_1 - (j-2)a_2} + b & \text{si } j \geq 3; \end{cases}$$

$$(E) \quad \lambda_{i,j} = \begin{cases} a_1 i + b & \text{si } j = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le cas (A) comporte le cas des équations de Dyson-Schwinger combinatoires, lorsque  $a_1 = a_2$ . Le cas (E) comporte le cas des corolles, lorsque  $a_1 = 1$  et  $b = 0$ .

## Théorème

À une normalisation près, la seule suite admissible d'ordre  $k \geq 2$  correspond au  $\Lambda$ -tableau donné par

$$\lambda_{i,j} = \begin{cases} (j+1)^k & \text{si } i = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La suite correspondante est

$$X(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n!^{k+1} c_n,$$

où  $c_n$  est la  $n$ -ième corolle.

## Définition

Si pour une certaine règle de Feynman non dégénérée, la fonction de Green associée à la série admissible  $X(x)$  vérifie une équation de groupe de renormalisation généralisée d'ordre  $\leq N$ , on dit que  $X(x)$  est une suite admissible faible d'ordre  $\leq N$ .

La caractérisation des suites faibles est beaucoup plus difficile, à cause de l'annulation possible des coefficients  $\sigma(X_n)$ . Néanmoins, on peut caractériser les suites admissibles faibles telles que pour tous  $i, j \geq 1$ ,  $\lambda_{i,j} \in \{0, 1\}$  et  $\lambda_{i,1} = 1$ .

## Théorème

La classification de ces suites donnent 4 cas :

- Pour tous  $i, j \geq 1$ ,  $\lambda_{i,j} = 1$ .
- Cas  $A(m)$  : il existe  $m \geq 2$  tel que  $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j < m, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

La caractérisation des suites faibles est beaucoup plus difficile, à cause de l'annulation possible des coefficients  $\sigma(X_n)$ . Néanmoins, on peut caractériser les suites admissibles faibles telles que pour tous  $i, j \geq 1$ ,  $\lambda_{1,j} \in \{0, 1\}$  et  $\lambda_{i,1} = 1$ .

## Théorème

La classification de ces suites donnent 4 cas :

- Cas  $B(m)$  : il existe  $m \geq 2$  tel que  $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 - i & \text{si } m \mid j, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$
- Cas  $C(m)$  : il existe  $m \geq 2$  tel que  $\lambda_{i,j} = \begin{cases} 1 - i & \text{si } j = m, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$

Merci pour votre attention !