

Une caractérisation des mots Sturmienens par les paires asymptotiques indistinguables

arXiv:2011.08112

Sebastián Barbieri*, Sébastien Labbé† et Štěpán Starosta‡

* Universidad de Santiago de Chile

† CNRS, LaBRI, Université de Bordeaux

‡ Czech Technical University in Prague

GT combinatoire du LaBRI

Bordeaux

28 octobre 2021

Plan

- Mots sturmiens

Mots mécaniques, mots de Christoffel, Théorème de Pirillo

- Terminologie

Dynamique symbolique, paires asymptotiques, occurrences de motifs, paires asymptotiques indistinguables

- Résultats

Théorème A, Théorème B, Théorème C

Mots sturmiens (Morse, Hedlund, 1940)

Si $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, alors les mots mécaniques sont **non-périodiques** :

$c'_\alpha(n) = \lceil \alpha(n+1) \rceil - \lceil \alpha n \rceil$ (mot sturmien caractéristique **supérieur**)

$c_\alpha(n) = \lfloor \alpha(n+1) \rfloor - \lfloor \alpha n \rfloor$ (mot sturmien caractéristique **inférieur**)



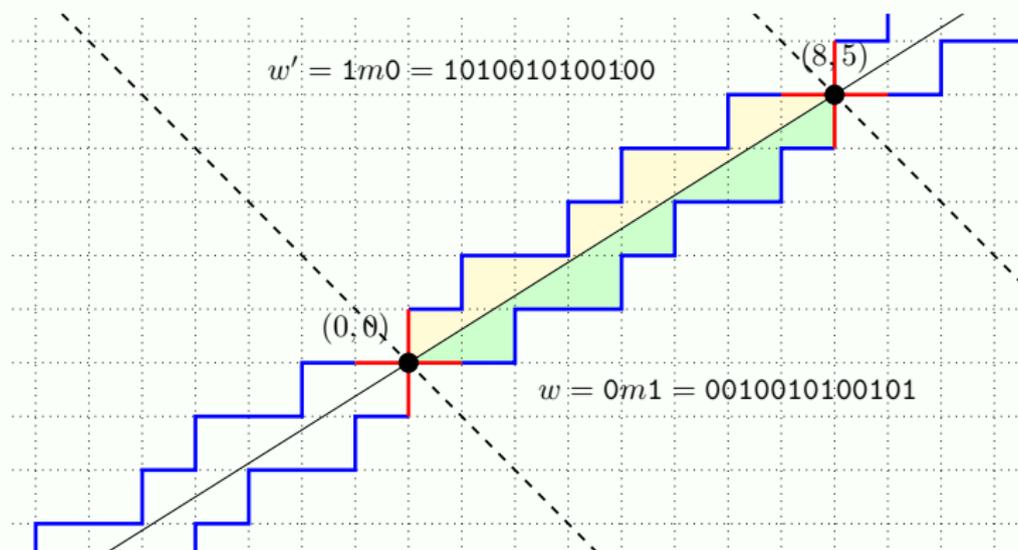
Mots de Christoffel

Si $\alpha \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, alors les mots mécaniques sont **périodiques** :

$c'_\alpha(n) = {}^\infty w' {}^\infty$ où w' est le mot de Christoffel **supérieur** de pente p/q ,

$c_\alpha(n) = {}^\infty w {}^\infty$ où w est le mot de Christoffel **inférieur** de pente p/q ,

où $\alpha = p/(p+q)$ et $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ sont des entiers copremiers.



De plus $w \leq_{lex} p \leq_{lex} w'$ pour toute période primitive p de c_α et c'_α .

Livres



- Chapitre 2 du livre de Lothaire (2002), par Berstel et Séébold
- Chapitre 6 du livre de Pytheas Fogg's (2002), par Arnoux
- Chapitre 9 du livre d'Allouche et Shallit's book (2003)
- Livre de Christophe Reutenauer (2019)

Mots sturmiens

La **complexité en facteurs** d'un mot infini $w \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ compte le nombre $p_w(n)$ de facteurs de longueur n dans w :

$$p_w(n) = \#(\mathcal{L}(w) \cap \Sigma^n).$$

Par exemple,

$$w = \dots 1010010100101.0010010100101 \dots$$

$$\mathcal{L}_0(w) = \{\varepsilon\},$$

$$\mathcal{L}_2(w) = \{00, 01, 10\},$$

$$\mathcal{L}_1(w) = \{0, 1\},$$

$$\mathcal{L}_3(w) = \{001, 010, 100, 101\}.$$

Theorem (Theorem 2.1.13, Lothaire, 2002)

Soit $s \in \Sigma^{\mathbb{N}}$ un mot infini. Les conditions suivantes sont équivalentes.

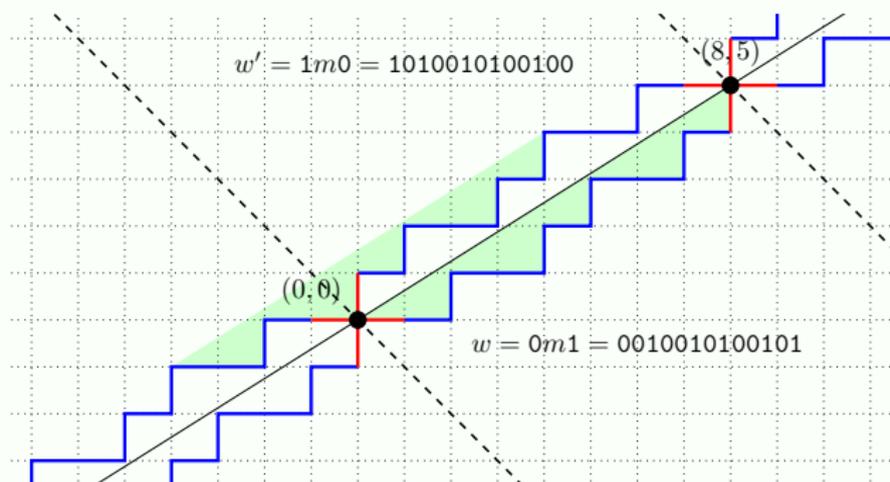
- s est **sturmien**, i.e., $P_s(n) = n + 1$ pour tout $n \geq 0$,
- s est **1-équilibré et aperiodique**,
- s est un **mot mécanique de pente irrationnelle**.

Théorème de Pirillo (2001)

Soit $w = 0m1$ et $w' = 1m0$ pour un certain $m \in \{0, 1\}^*$.

Theorem

Le mot w est un mot de Christoffel inférieur ssi w et w' sont conjugués.



A d -dimensional extension of Christoffel words

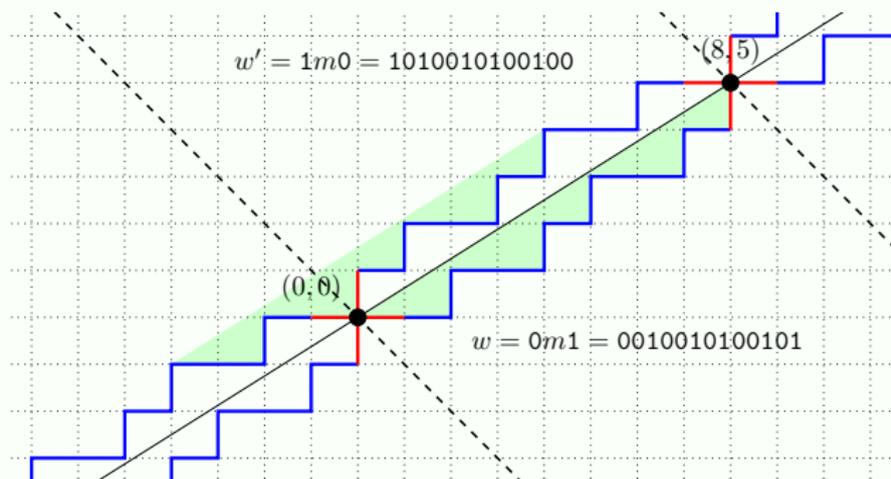
S. Labbé, C. Reutenauer, *Discrete Comput. Geom.* **54** (2015) 152–181.

Théorème de Pirillo (adapté pour ${}^\infty w^\infty$)

Soit $w = 0m1$ et $w' = 1m0$ où $m \in \{0, 1\}^*$.

Theorem

${}^\infty w^\infty = c_\alpha$ est un mot mécanique inférieur de pente $\alpha = p/(p+q)$
ssi ${}^\infty w^\infty$ est un décalé de ${}^\infty w'^\infty$.



Question : Soit $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$.

Est-ce que $\lim_{\frac{p}{p+q} \rightarrow \alpha}$ (Théorème de Pirillo) existe ?

Dynamique symbolique

On considère

- un ensemble fini Σ : l'**alphabet**,
- l'espace des **configurations** $\Sigma^{\mathbb{Z}} = \{x: \mathbb{Z} \rightarrow \Sigma\}$,
- $\Sigma^{\mathbb{Z}}$ doté de la **topologie prodiscrète**,

$$x = \dots \boxed{0}0010111011100.011001000001101 \boxed{100001} \dots$$

$$y = \dots \boxed{1}0010111011100.011001000001101 \boxed{011110} \dots$$

- à un motif $p: S \rightarrow \Sigma$ avec support fini $S \subset \mathbb{Z}$, un **cylindre**

$$[p] = \left\{ x \in \Sigma^{\mathbb{Z}} : x|_S = p \right\}.$$

- l'action de **décalage** $\mathbb{Z} \curvearrowright \Sigma^{\mathbb{Z}}$.

$$\sigma^{-1}(x) = \dots 10001011101110.001100100000110110000 \dots$$

$$x = \dots 00010111011100.011001000001101100001 \dots$$

$$\sigma(x) = \dots 00101110111000.110010000011011000010 \dots$$

$$\sigma^2(x) = \dots 01011101110001.100100000110110000100 \dots$$

Paires asymptotiques

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ les deux configurations $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$, e.g.,

$$\begin{aligned}x &= \dots 0010111011 \boxed{0} 100.0 \boxed{0001} 01 \boxed{10} 110010000011 \dots \\y &= \dots 0010111011 \boxed{1} 100.0 \boxed{1110} 01 \boxed{01} 110010000011 \dots\end{aligned}$$

différentes aux positions $F = \{-4\} \cup \{1, 2, 3, 4\} \cup \{7, 8\}$.

Definition

$x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ sont **asymptotiques** si elles diffèrent en un nombre fini de positions de \mathbb{Z} .

L'ensemble $F = \{n \in \mathbb{Z} : x_n \neq y_n\}$ est appelé **support des différences** de (x, y) .

Occurrences

L'ensemble des **occurrences** d'un motif p dans une configuration $x \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ est

$$\text{occ}_p(x) = \{n \in \mathbb{Z} : \sigma^n(x) \in [p]\}.$$

Exemple : motif $p = .1001$ avec support $S = \{0, 1, 2, 3\}$

$$x = \dots 10\underline{1001}0\underline{1001}0\underline{1001}00\underline{1001}0\underline{1001}01 \dots$$

$$y = \dots 10\underline{1001}0\underline{1001}00.\overline{101001}0\underline{1001}01 \dots$$

Donc,

$$\text{occ}_p(x) = \{\dots, -11, -6, -1, 2, 7, \dots\}$$

$$\text{occ}_p(y) = \{\dots, -11, -6, -3, 2, 7, \dots\}$$

Paires asymptotiques indistinguables

On observe que lorsque $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ sont asymptotiques, alors

$$\text{occ}_p(x) \setminus \text{occ}_p(y) \subseteq F - S$$

est un ensemble fini.

Exemple : motif $p = .1001$ avec $S = \{0, 1, 2, 3\}$ et $F = \{-1, 0\}$:

$$x = \cdots 10\underline{1001}0\underline{1001}0 \boxed{1.0} \overline{010010100101} \cdots$$

$$y = \cdots 10\underline{1001}0\underline{1001}0 \boxed{0.1} \overline{010010100101} \cdots$$

$$\text{occ}_p(x) \setminus \text{occ}_p(y) = \{-1\} \quad \text{and} \quad \text{occ}_p(y) \setminus \text{occ}_p(x) = \{-3\}$$

Definition

On dit que deux configurations asymptotiques $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}^d}$ sont **indistinguables** si

$$\#(\text{occ}_p(x) \setminus \text{occ}_p(y)) = \#(\text{occ}_p(y) \setminus \text{occ}_p(x))$$

pour tout support fini $S \subset \mathbb{Z}^d$ et pour tout motif $p \in \Sigma^S$.

Paires asymptotiques indistinguables

Exemple 1 : La paire asymptotique **triviale** (x, x) est indistinguable.

Exemple 2 :

$$\begin{aligned}x &= \dots 0000000000000000. \boxed{1} 000000 \boxed{0} 000000000000 \dots \\y &= \dots 0000000000000000. \boxed{0} 000000 \boxed{1} 000000000000 \dots\end{aligned}$$

Dans les deux exemples, x et y sont dans la **même orbite** de $\mathbb{Z} \xrightarrow{\sigma} \Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Question (S. Barbieri) : Peut-on trouver d'autres exemples ?

Paires asymptotiques indistinguables

Non-Exemple 3 :

$$x = \dots 00000000000000. \boxed{1111111} 11111111111111 \dots$$
$$y = \dots 00000000000000. \boxed{0000000} 11111111111111 \dots$$

Exemple 4 :

$$x = \dots bcabcabcabcabcabc. \boxed{abc} bcabcabcabcabcabc \dots$$
$$y = \dots bcabcabcabcabcabc. \boxed{bca} bcabcabcabcabcabc \dots$$

Théorème A

Theorem

Soit $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ et supposons que x est **récurrent**.

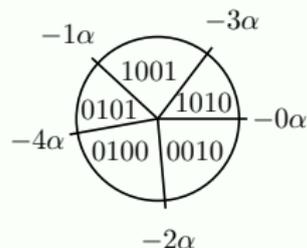
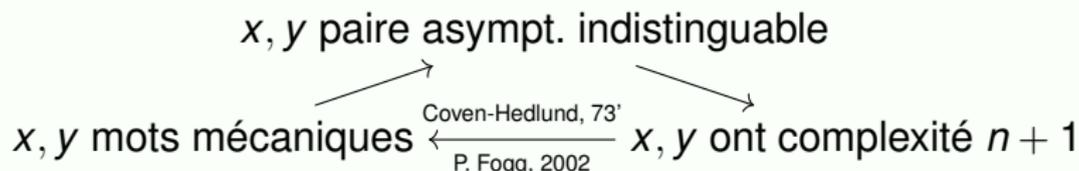
La paire (x, y) est une **paire asymptotique indistinguishable** avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ tel que $x_{-1}x_0 = 10$ et $y_{-1}y_0 = 01$

si et seulement si

il existe $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ tel que $x = c_\alpha$ et $y = c'_\alpha$ sont les **mots sturmiens caractéristiques** inférieur et supérieur de pente α .

Idée de la preuve du Théorème A

(Rappelons l'hypothèse que x est récurrent)



$$x = \dots 101001010010 \boxed{1.0} 010010100101 \dots$$
$$y = \dots 101001010010 \boxed{0.1} 010010100101 \dots$$

Proposition

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une paire asymptotique indistinguable non-triviale dont le support des différences F est contenu dans un intervalle I . Pour tout $n \geq 1$

$$n + 1 \leq \#\mathcal{L}_n(x) \leq n + \#I - 1.$$

Exemple utilisant les mots de Christoffel

Soit $\theta m1$ un mot de Christoffel inférieur de pente p/q avec $p + q = n$.
Les 2 mots de longueur $2n$:

$1m1.\theta m1$

$1m\theta.1m1$

contiennent $n + 1$ facteurs de longueur n (une occurrence de chaque). Par exemple,

```
sage: u = Word('10100101001010010010100101')
sage: v = Word('10100101001001010010100101')
sage: v.factor_set(13) == u.factor_set(13)
True
sage: len(u.factor_set(13))
14
```

Théorème B

Theorem

Soit $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$.

La paire (x, y) est une **paire asymptotique indistinguable** avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ tel que $x_{-1}x_0 = 10$ et $y_{-1}y_0 = 01$

si et seulement si

il existe une suite monotone $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $\alpha_n \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$ t.q.

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\alpha_n} \quad \text{et} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} c'_{\alpha_n}.$$

sont les limites de **mots sturmiens caractéristiques** de pente α_n .

Si $\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, alors

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} c_{\alpha_n} = c_{\alpha} \quad \text{et} \quad y = \lim_{n \rightarrow \infty} c'_{\alpha_n} = c'_{\alpha}$$

et ça correspond au Théorème A.

Théorème B : limites vers les pentes rationnelles

Supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = p/(p+q) \in [0, 1] \cap \mathbb{Q}$, avec $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ copremiers. Si $p \neq 0$ et $q \neq 0$ et la limite est **à droite**, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{p}{p+q}^+} c_\alpha = {}^\infty(1m0)(1m1).(0m1)(0m1)^\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{p}{p+q}^+} c'_\alpha = {}^\infty(1m0)(1m0).(1m1)(0m1)^\infty$$

ou la limite est **à gauche**, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{p}{p+q}^-} c_\alpha = {}^\infty(0m1)(0m1).(0m0)(1m0)^\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{p}{p+q}^-} c'_\alpha = {}^\infty(0m1)(0m0).(1m0)(1m0)^\infty$$

Cas limites : lorsque $p = 0$ et $q = 1$ ou $p = 1$ et $q = 0$, alors

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} c_\alpha = {}^\infty 01.00^\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} c'_\alpha = {}^\infty 00.10^\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} c_\alpha = {}^\infty 11.01^\infty$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} c'_\alpha = {}^\infty 10.11^\infty$$

Idée de la preuve du Théorème B (\implies)

Soit $x, y \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ et supposons que x est **non récurrent**.

Si la paire (x, y) est une **paire asymp. indistinguable** avec support des différences $F = \{-1, 0\}$ telle que $x_{-1}x_0 = 10$ et $y_{-1}y_0 = 01$,

alors

$x = \sigma^k(y)$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$.

Si $k \geq 2$, alors il existe $m \in \{0, 1\}^{k-2}$ t.q.

$$x = {}^\infty(1m0)(1m1).(0m1)(0m1)^\infty$$

$$y = {}^\infty(1m0)(1m0).(1m1)(0m1)^\infty$$

- $1m0$ apparaît dans y intersectant le support des différences F
- il doit apparaître dans x intersectant le support des différences F
- Donc $1m0$ est un facteur de $1m1.0m1$, mais pas comme préfixe
- Alors $1m0$ est un facteur de $m1.0m1$ et $0m1.0m1 = (0m1)^2$
- Ceci implique que $1m0$ et $0m1$ sont conjugués
- Le Théorème de **Pirillo** \implies $0m1$ est un **mot de Christoffel inférieur** de pente p/q pour des entiers copremiers $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ satisfaisant $p + q = k$.

Liens avec des travaux de Christophe et Franco

Le Théorème B est relié au classement des mots 1-équilibrés en 4 catégories :

- mots 1-équilibrés aperiodique ne passant pas par l'origine ;
- mots 1-équilibrés aperiodique passant par l'origine ;
- mots périodiques ${}^\infty(amb)^\infty \equiv {}^\infty(bma)^\infty$
- mots ultimement périodiques

$${}^\infty(bma)(bmb)(amb)^\infty$$

$${}^\infty(amb)(ama)(bma)^\infty$$

C'est relié à la théorie de Markoff, voir :



On Markoff's property and Sturmian words

C. Reutenauer, Math. Ann. 336 (2006) 1–12.



A note on the Markoff condition and central words

A. Glen, A. Lauve, and F. V. Saliola, Inform. Process. Lett. 105 (2008) 241–244.

Théorème C

Theorem

Soit Σ un **alphabet fini**. Alors $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ est une **paire asymptotique indistinguable** non-triviale

si et seulement si

soit

- x est **recurrent** et il existe $\alpha \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q}$, une substitution $\varphi: \{0, 1\} \rightarrow \Sigma^+$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi(\sigma(c_\alpha)), \sigma^m \varphi(\sigma(c'_\alpha))\},$$

- x est **non recurrent** et il existe une substitution $\varphi: \{0, 1\} \rightarrow \Sigma^+$ et un entier $m \in \mathbb{Z}$ tel que

$$\{x, y\} = \{\sigma^m \varphi({}^\infty 0.10^\infty), \sigma^m \varphi({}^\infty 0.010^\infty)\}.$$

Idée de la preuve du Théorème C (\Leftarrow)

Soit $x, y \in \Sigma^{\mathbb{Z}}$ une **paire asymptotique** telle que leur support des différences F est dans l'intervalle $\llbracket 0, k - 1 \rrbracket$.

Lemma

Soit $\varphi: \Sigma \rightarrow \Gamma^+$ une **substitution** on $\Sigma^{\mathbb{Z}}$.

Si (x, y) est une **paire asymptotique indistinguable**, alors $(\varphi(x), \varphi(y))$ est une **paire asymptotique indistinguable**.

$$x = \dots 010010. \boxed{01} 0100101 \dots$$

$$y = \dots 010010. \boxed{10} 0100101 \dots$$

Applying $\varphi: 0 \mapsto abc, 1 \mapsto bc$:

$$\varphi(x) = \dots bcabcabcabcabcabc. \boxed{abc} bcabcabcabcabcabc \dots$$

$$\varphi(y) = \dots bcabcabcabcabcabc. \boxed{bca} bcabcabcabcabcabc \dots$$

Thermodynamics et Gibbs theory

 Gibbsian representations of continuous specifications :
the theorems of Kozlov et Sullivan revisited.

S. Barbieri, R. Gómez, B. Marcus, T. Meyerovitch, S. Taati. arXiv:2001.03880

They defined the following **norm** on asymptotic configurations of $\Sigma^{\mathbb{Z}}$:

$$\|(x, y)\|_{\text{NS}}^* = \sup_{\substack{S \subset \mathbb{Z} \\ S \text{ finite}}} \frac{1}{|S|} \sum_{p \in \Sigma^S} |\Delta_p(x, y)|.$$

- Every asymptotic pair induces an evaluation map on the space of **continuous cocycles** on the equiv. relation of asymptotic pairs.
- They show that this norm coincides with the **dual norm** in the space of linear functionals on the space of continuous cocycles.
- In other words, the asymptotic pairs which induce the null operator are precisely the **indistinguishable pairs**.
- Thus, our results provide a full characterization of which asymptotic pairs induce the **null operator**.

En cours

Nous sommes en train de généraliser le Théorème A à \mathbb{Z}^d .

Généraliser le Théorème B et le Théorème C à \mathbb{Z}^d semble demander plus de travail.