

Pavages par dominos dans le plan (5)

Petite école de combinatoire

Philippe Duchon

LaBRI

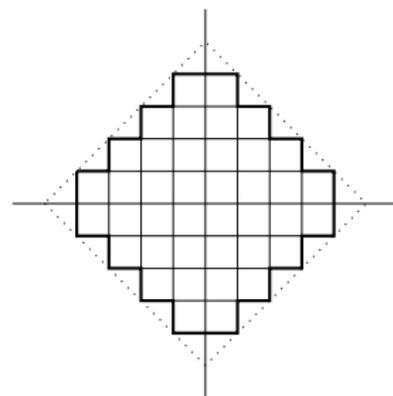
3 juillet 2022

Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”

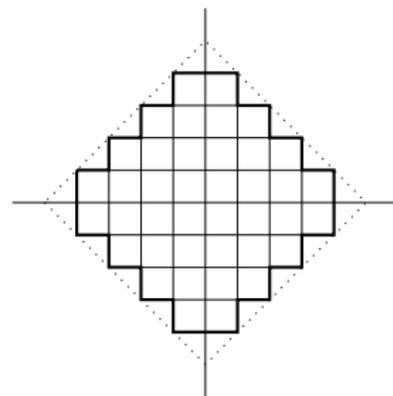
Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$



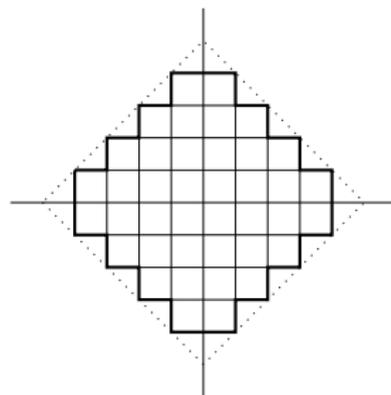
Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)



Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)
- a_n le nombre de pavages par dominos de A_n



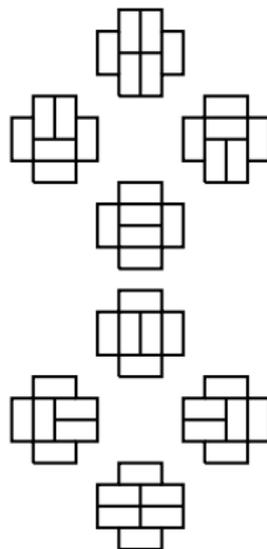
Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)
- a_n le nombre de pavages par dominos de A_n
- 1, 2



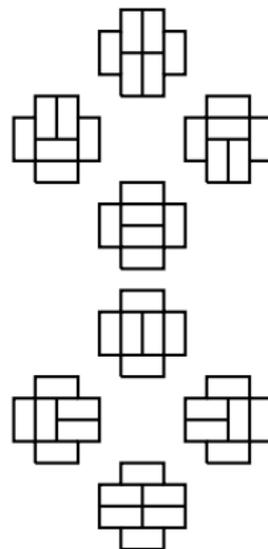
Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)
- a_n le nombre de pavages par dominos de A_n
- 1, 2, 8, 64, 1024 . . .



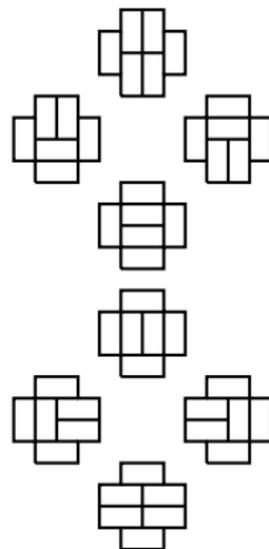
Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)
- a_n le nombre de pavages par dominos de A_n
- 1, 2, 8, 64, 1024 . . .
- $a_n = 2^{n(n+1)/2}$

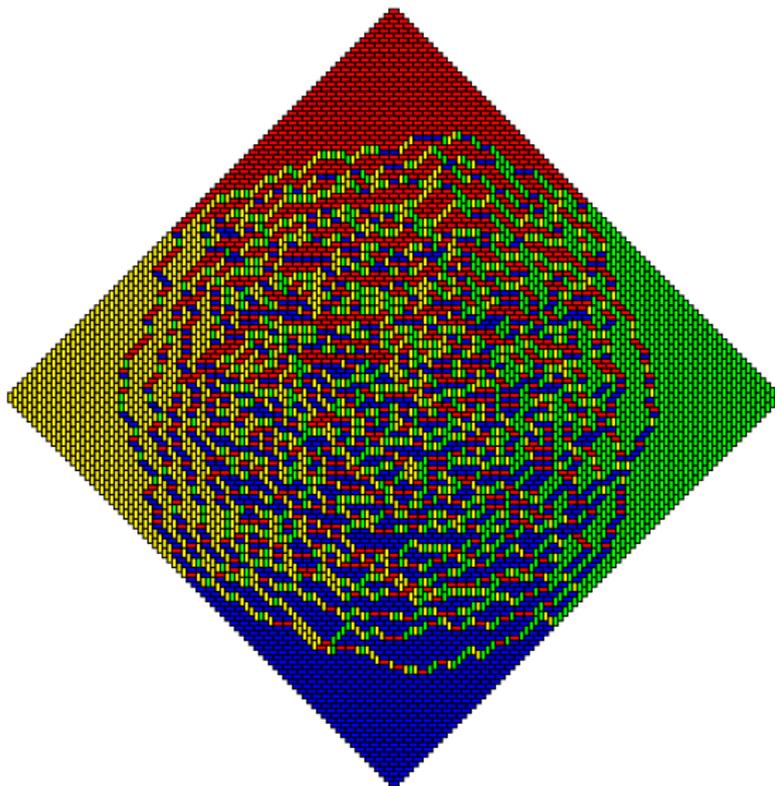


Diamant aztèque

- **Région particulière** : “diamant aztèque”
- A_n : cellules 1×1 incluses dans le carré défini par $|x| + |y| \leq n + 1$
- (aire de A_n : $2n(n + 1)$)
- a_n le nombre de pavages par dominos de A_n
- 1, 2, 8, 64, 1024 . . .
- $a_n = 2^{n(n+1)/2}$
- autrement dit : $a_n = 2^n a_{n-1}$



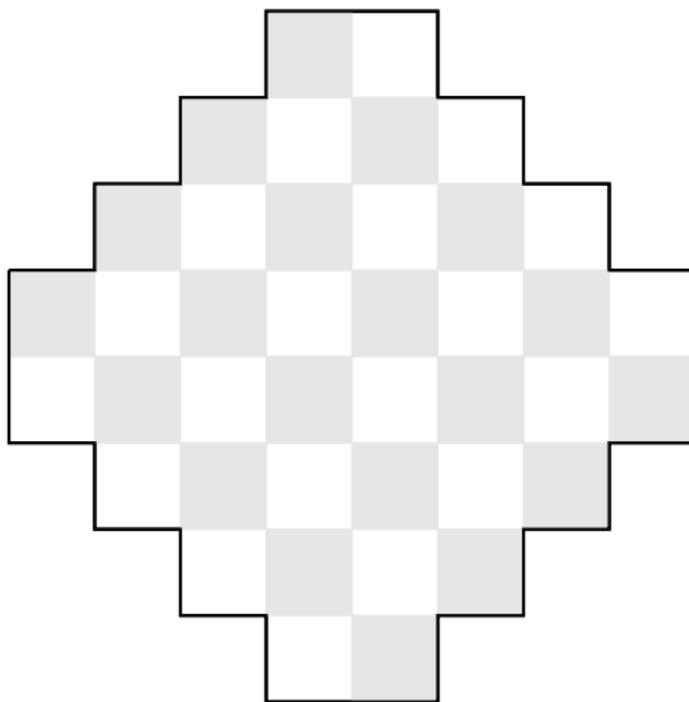
Le “cercle arctique”



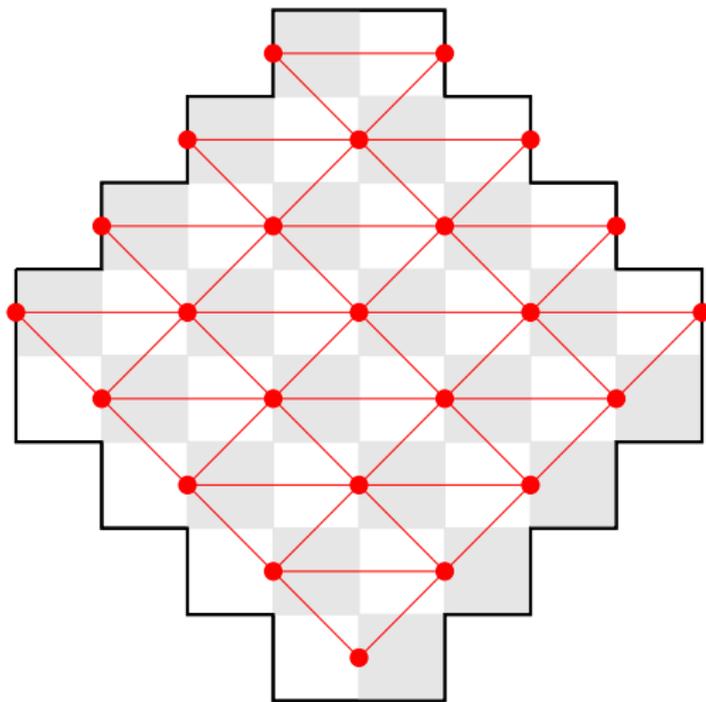
Au programme

- Formule de comptage (Gessel-Viennot)
- Glissement de dominos (Propp)
- Re-formule de comptage
- Pavages aléatoires par glissement de dominos

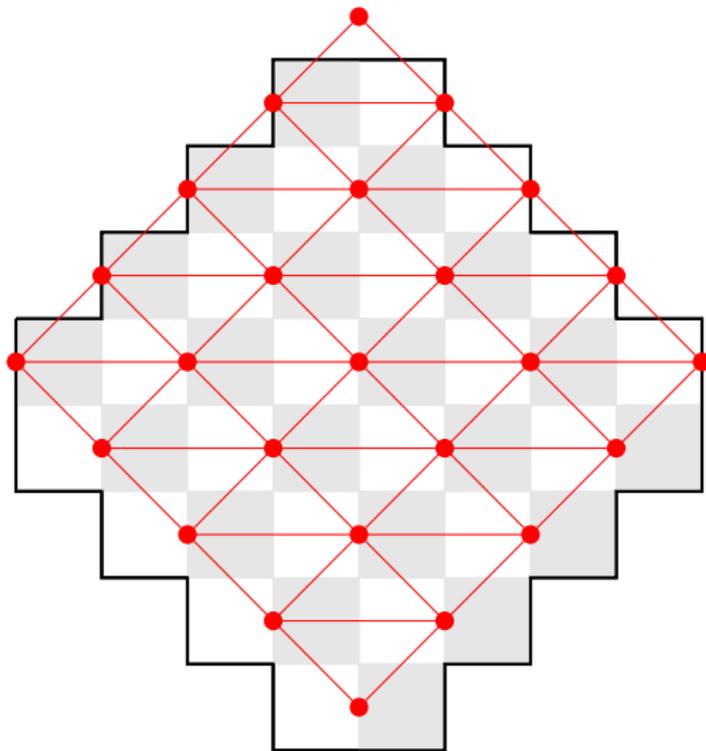
Gessel-Viennot pour le diamant aztèque



Gessel-Viennot pour le diamant aztèque



Gessel-Viennot pour le diamant aztèque



Le déterminant

D'après Gessel-Viennot, $a_n = \det(m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$, avec

$$m_{0,j} = 1$$

$$m_{i,j} = 1$$

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

Le déterminant

D'après Gessel-Viennot, $a_n = \det(m_{i,j})_{0 \leq i,j \leq n}$, avec

$$m_{0,j} = 1$$

$$m_{i,j} = 1$$

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix}$$

Calcul “joliment taupinal”

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

$$a_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix}$$

Calcul “joliment taupinal”

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

$$a_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 6 & 8 \\ 0 & 2 & 8 & 18 & 32 \\ 0 & 2 & 12 & 38 & 88 \\ 0 & 2 & 16 & 66 & 192 \end{pmatrix}$$

Calcul “joliment taupinal”

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

$$a_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 2 & 10 & 26 & 50 \\ 0 & 2 & 14 & 50 & 126 \end{pmatrix}$$

Calcul “joliment taupinal”

$$m_{i+1,j+1} = m_{i,j} + m_{i+1,j} + m_{i,j+1}$$

$$a_n = \det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 5 & 13 & 25 & 41 \\ 1 & 7 & 25 & 63 & 129 \\ 1 & 9 & 41 & 129 & 321 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 6 & 10 & 14 \\ 0 & 2 & 10 & 26 & 50 \\ 0 & 2 & 14 & 50 & 126 \end{pmatrix}$$

Au final, $a_n = 2^n a_{n-1}$, on a bien $a_n = 2^{n(n+1)/2}$.

Glissement de dominos

- Par le calcul de déterminant, on a $a_n = 2^n a_{n-1}$.

Glissement de dominos

- Par le calcul de déterminant, on a $a_n = 2^n a_{n-1}$.
- Mais au vu de la formule, on aimerait une bijection entre les pavages de A_n d'une part, et les couples formés d'un mot binaire de longueur n et d'un pavage de A_{n-1} , d'autre part.

Glissement de dominos

- Par le calcul de déterminant, on a $a_n = 2^n a_{n-1}$.
- Mais au vu de la formule, on aimerait une bijection entre les pavages de A_n d'une part, et les couples formés d'un mot binaire de longueur n et d'un pavage de A_{n-1} , d'autre part.
- D'autant qu'une telle bijection donnerait un algorithme de génération aléatoire uniforme.

Glissement de dominos

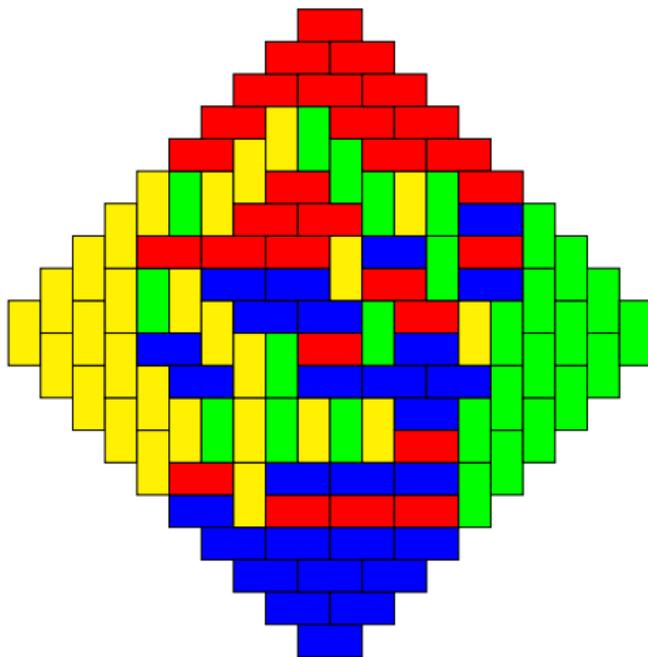
- Par le calcul de déterminant, on a $a_n = 2^n a_{n-1}$.
- Mais au vu de la formule, on aimerait une bijection entre les pavages de A_n d'une part, et les couples formés d'un mot binaire de longueur n et d'un pavage de A_{n-1} , d'autre part.
- D'autant qu'une telle bijection donnerait un algorithme de génération aléatoire uniforme.
- Une telle bijection est (quasiment) fournie par le "glissement de dominos" de Propp.

Glissement en trois étapes

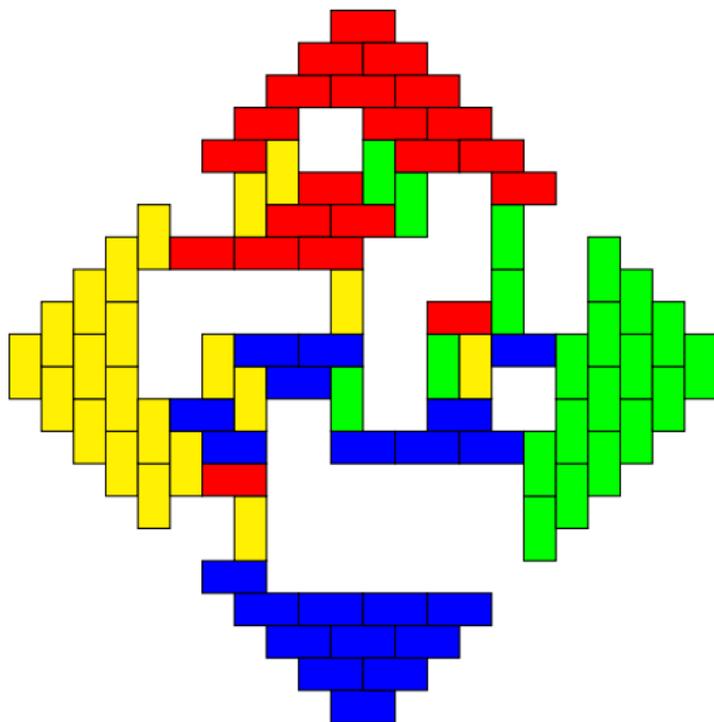
Partant d'un pavage de A_{n-1} , on passe à un pavage de A_n en trois étapes :

- 1 certaines paires de dominos sont effacées
- 2 tous les dominos restants se déplacent d'une case, perpendiculairement à leur orientation
- 3 ça laisse un pavage incomplet de A_n , qu'on complète en pavant des carrés 2×2
- 4 et le nombre de carrés à paver à l'étape 3, est n de plus que le nombre de paires de dominoes effacées à l'étape 1.

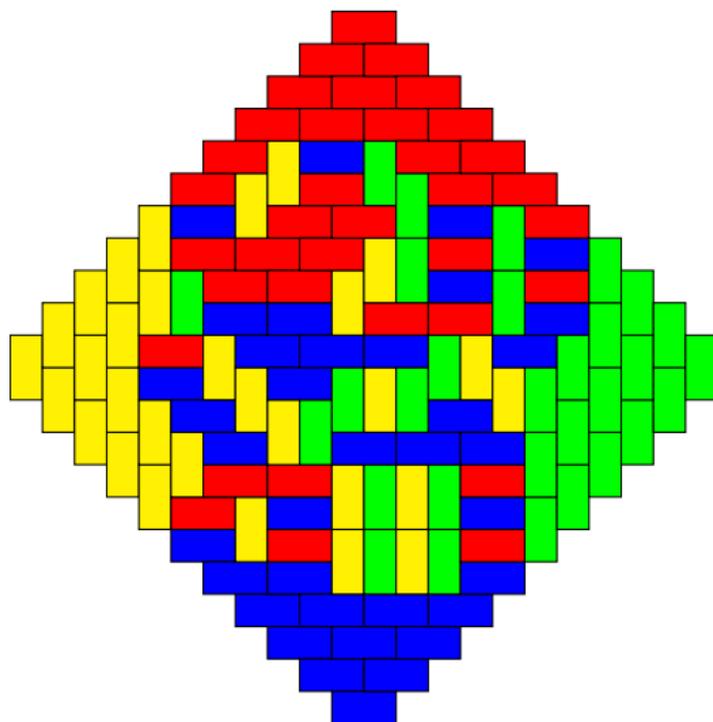
Un exemple de glissement : départ



Un exemple de glissement : glissement



Un exemple de glissement : création



Effacement

- **Convention** : les cases du bord nord-ouest ou sud-est sont “noires”, celles du bord sud-ouest ou nord-est sont “blanches”.

Effacement

- **Convention** : les cases du bord nord-ouest ou sud-est sont “noires”, celles du bord sud-ouest ou nord-est sont “blanches”.
- **Position** : un sommet du diamant aztèque, dont le voisinage



Effacement

- **Convention** : les cases du bord nord-ouest ou sud-est sont “noires”, celles du bord sud-ouest ou nord-est sont “blanches”.
- **Position** : un sommet du diamant aztèque, dont le voisinage



- Une telle position est le milieu de 0, 1 ou 2 côtés longs de dominos.

Effacement

- **Convention** : les cases du bord nord-ouest ou sud-est sont “noires”, celles du bord sud-ouest ou nord-est sont “blanches”.
- **Position** : un sommet du diamant aztèque, dont le voisinage



- Une telle position est le milieu de 0, 1 ou 2 côtés longs de dominos.
- **Effacement** : autour de chaque position longée par deux dominos, on efface ces deux dominos (on ne touche pas aux autres).

Glissement

- Autour de chaque “position”, il reste 0 ou 1 domino.

Glissement

- Autour de chaque “position”, il reste 0 ou 1 domino.
- S’il en reste un, on le déplace de l’autre côté de sa position.

Glissement

- Autour de chaque “position”, il reste 0 ou 1 domino.
- S’il en reste un, on le déplace de l’autre côté de sa position.
- Cela revient à faire glisser d’une case chaque type de domino :
 - les  vers le nord ;
 - les  vers le sud ;
 - les  vers l’est
 - les  vers l’ouest.

Création

- **Lemme** : Le glissement ne provoque pas de superposition de dominos ; de plus, après glissement, les dominos pavent A_n privé des carrés 2×2 autour des positions qui, **avant l'effacement**, n'étaient bordées par aucun domino.

Création

- **Lemme** : Le glissement ne provoque pas de superposition de dominos ; de plus, après glissement, les dominos pavent A_n privé des carrés 2×2 autour des positions qui, **avant l'effacement**, n'étaient bordées par aucun domino.
- Le carré 2×2 autour de chacune de ces positions peut être pavé soit par deux dominos horizontaux, soit par deux verticaux.

Création

- **Lemme** : Le glissement ne provoque pas de superposition de dominos ; de plus, après glissement, les dominos pavent A_n privé des carrés 2×2 autour des positions qui, **avant l'effacement**, n'étaient bordées par aucun domino.
- Le carré 2×2 autour de chacune de ces positions peut être pavé soit par deux dominos horizontaux, soit par deux verticaux.
- Comme A_n contient $4n$ cases de plus que A_{n-1} , si on efface k paires de dominos, on en recrée $n + k$.

Bilan du glissement de dominos

- Chaque pavage m de A_{n-1} peut donner, après l'opération, 2^{n+k} pavages différents de A_n , où k est le nombre (variable!) de positions effacées.

Bilan du glissement de dominos

- Chaque pavage m de A_{n-1} peut donner, après l'opération, 2^{n+k} pavages différents de A_n , où k est le nombre (variable!) de positions effacées.
- Mais il y a $2^k - 1$ autres pavages qui donnent exactement les mêmes 2^{n+k} pavages de A_n (tous ceux qui diffèrent de m seulement autour des positions effacées)

Bilan du glissement de dominos

- Chaque pavage m de A_{n-1} peut donner, après l'opération, 2^{n+k} pavages différents de A_n , où k est le nombre (variable!) de positions effacées.
- Mais il y a $2^k - 1$ autres pavages qui donnent exactement les mêmes 2^{n+k} pavages de A_n (tous ceux qui diffèrent de m seulement autour des positions effacées)
- Résultat, si on part d'un pavage aléatoire uniforme de A_{n-1} et qu'on tire indépendamment à pile ou face pour chaque création, on obtient un pavage aléatoire uniforme de A_n

Bilan du glissement de dominos

- Chaque pavage m de A_{n-1} peut donner, après l'opération, 2^{n+k} pavages différents de A_n , où k est le nombre (variable !) de positions effacées.
- Mais il y a $2^k - 1$ autres pavages qui donnent exactement les mêmes 2^{n+k} pavages de A_n (tous ceux qui diffèrent de m seulement autour des positions effacées)
- Résultat, si on part d'un pavage aléatoire uniforme de A_{n-1} et qu'on tire indépendamment à pile ou face pour chaque création, on obtient un pavage aléatoire uniforme de A_n
- **Variante** pour obtenir une bijection : “noter” les orientations des k paires de dominos effacées, et les réutiliser lors de la création ; on n'aura ainsi besoin de choisir que n orientations.

Une conséquence : les bords du diamant

- Le long du côté nord-ouest, on a forcément, de l'ouest au nord, d'abord un nombre k (variable) de dominos verticaux, puis $n - k$ dominos horizontaux.

Une conséquence : les bords du diamant

- Le long du côté nord-ouest, on a forcément, de l'ouest au nord, d'abord un nombre k (variable) de dominos verticaux, puis $n - k$ dominos horizontaux.
- Lors de l'effacement, ces dominos ne sont pas effacés ; après glissement, ils se retrouvent le long du côté nord-ouest du nouveau diamant.

Une conséquence : les bords du diamant

- Le long du côté nord-ouest, on a forcément, de l'ouest au nord, d'abord un nombre k (variable) de dominos verticaux, puis $n - k$ dominos horizontaux.
- Lors de l'effacement, ces dominos ne sont pas effacés ; après glissement, ils se retrouvent le long du côté nord-ouest du nouveau diamant.
- Lors de la phase de création, on a une chance sur deux d'ajouter un domino vertical, et une chance sur deux d'ajouter un domino horizontal.

Une conséquence : les bords du diamant

- Le long du côté nord-ouest, on a forcément, de l'ouest au nord, d'abord un nombre k (variable) de dominos verticaux, puis $n - k$ dominos horizontaux.
- Lors de l'effacement, ces dominos ne sont pas effacés ; après glissement, ils se retrouvent le long du côté nord-ouest du nouveau diamant.
- Lors de la phase de création, on a une chance sur deux d'ajouter un domino vertical, et une chance sur deux d'ajouter un domino horizontal.
- **Résultat** : dans un pavage uniforme de A_n , k suit une loi binomiale. . .

Une conséquence : les bords du diamant

- Le long du côté nord-ouest, on a forcément, de l'ouest au nord, d'abord un nombre k (variable) de dominos verticaux, puis $n - k$ dominos horizontaux.
- Lors de l'effacement, ces dominos ne sont pas effacés ; après glissement, ils se retrouvent le long du côté nord-ouest du nouveau diamant.
- Lors de la phase de création, on a une chance sur deux d'ajouter un domino vertical, et une chance sur deux d'ajouter un domino horizontal.
- **Résultat** : dans un pavage uniforme de A_n , k suit une loi binomiale. . .
- (On est très loin du théorème du cercle arctique, mais ça nous dit où se situe la limite des zones “gelées”)

Bonus : le cercle arctique

- Après homothétie de rapport $1/(n+1)$, A_n remplit presque le carré $|x| + |y| \leq 1$.

Bonus : le cercle arctique

- Après homothétie de rapport $1/(n+1)$, A_n remplit presque le carré $|x| + |y| \leq 1$.
- Le cercle inscrit dans ce carré est de rayon $\sqrt{2}/2$

Bonus : le cercle arctique

- Après homothétie de rapport $1/(n+1)$, A_n remplit presque le carré $|x| + |y| \leq 1$.
- Le cercle inscrit dans ce carré est de rayon $\sqrt{2}/2$
- Pour un point (x, y) à l'intérieur du carré, on peut définir $p_i(n; x, y)$ comme étant la proportion, parmi les pavages (homothétisés) de A_n , de ceux pour lesquels (x, y) est dans un domino de type i ($i \in \{N, S, E, O\}$).

Bonus : le cercle arctique

- Après homothétie de rapport $1/(n+1)$, A_n remplit presque le carré $|x| + |y| \leq 1$.
- Le cercle inscrit dans ce carré est de rayon $\sqrt{2}/2$
- Pour un point (x, y) à l'intérieur du carré, on peut définir $p_i(n; x, y)$ comme étant la proportion, parmi les pavages (homothétisés) de A_n , de ceux pour lesquels (x, y) est dans un domino de type i ($i \in \{N, S, E, O\}$).
- **Théorème** : si $x^2 + y^2 > 1/2$, l'un des $p_i(n; x, y)$ tend vers 1 (les autres vers 0) pour $n \rightarrow \infty$; si $x^2 + y^2 < 1/2$, les quatre $p_i(n; x, y)$ ont une limite positive (explicite)

Bonus : le cercle arctique

- Après homothétie de rapport $1/(n+1)$, A_n remplit presque le carré $|x| + |y| \leq 1$.
- Le cercle inscrit dans ce carré est de rayon $\sqrt{2}/2$
- Pour un point (x, y) à l'intérieur du carré, on peut définir $p_i(n; x, y)$ comme étant la proportion, parmi les pavages (homothétisés) de A_n , de ceux pour lesquels (x, y) est dans un domino de type i ($i \in \{N, S, E, O\}$).
- **Théorème** : si $x^2 + y^2 > 1/2$, l'un des $p_i(n; x, y)$ tend vers 1 (les autres vers 0) pour $n \rightarrow \infty$; si $x^2 + y^2 < 1/2$, les quatre $p_i(n; x, y)$ ont une limite positive (explicite)
- En fait il y a une limite déterministe pour la fonction de hauteur (normalisée pour varier de -1 à 1 sur les bords) ; dans chacun des "coins" à l'extérieur du cercle, c'est une fonction affine.