

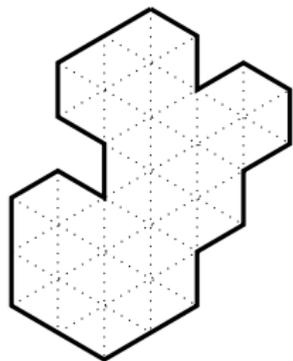
# Pavages par dominos dans le plan (3)

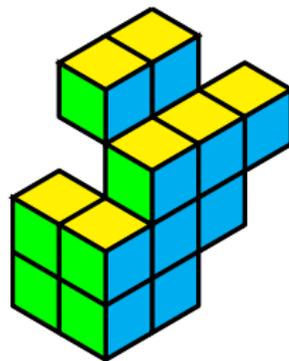
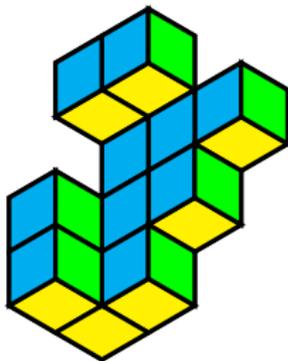
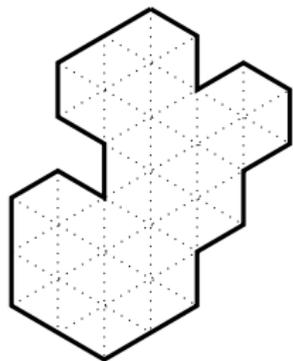
Petite école de combinatoire

Philippe Duchon

LaBRI

13 juin 2022





## Comptage des pavages : déterminant

- Le déterminant de la matrice d'adjacence bipartie, correctement modifiée, donne le nombre de pavages (**Kasteleyn**)

## Comptage des pavages : déterminant

- Le déterminant de la matrice d'adjacence bipartie, correctement modifiée, donne le nombre de pavages (**Kasteleyn**)
- Sur le réseau triangulaire (pavages par losanges), pas besoin de modifier la matrice.

## Comptage des pavages : déterminant

- Le déterminant de la matrice d'adjacence bipartie, correctement modifiée, donne le nombre de pavages **(Kasteleyn)**
- Sur le réseau triangulaire (pavages par losanges), pas besoin de modifier la matrice.
- Il se trouve que sur réseau carré, on peut se contenter de mettre des poids 1 sur les arêtes horizontales et  $i$  sur les arêtes verticales : tous les pavages contribuent un terme de même argument au déterminant, et le nombre de pavages est le module du déterminant.

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .
- Un pavage par losanges peut s'interpréter de manière bijective comme une configuration de chemins sur réseau carré, qui ne s'intersectent pas, et qui relie certains points du bord de  $R$ .

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .
- Un pavage par losanges peut s'interpréter de manière bijective comme une configuration de chemins sur réseau carré, qui ne s'intersectent pas, et qui relie certains points du bord de  $R$ .
- Le **lemme de Gessel-Viennot** exprime alors le nombre de telles configurations de chemins, comme le déterminant d'une matrice (taille : nombre de chemins, soit bornée par le périmètre ; coefficients : nombre de chemins dirigés d'une extrémité à une autre)

# Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.

## Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .

## Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .
- On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j}$  est le **nombre** de chemins de  $A_i$  à  $B_j$  dans  $G$ .

## Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .
- On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j}$  est le **nombre** de chemins de  $A_i$  à  $B_j$  dans  $G$ .
- On considère des *familles de  $n$  chemins*  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $G$ , **disjoints** (aucun sommet en commun entre deux chemins)

# Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .
- On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j}$  est le **nombre** de chemins de  $A_i$  à  $B_j$  dans  $G$ .
- On considère des *familles de  $n$  chemins*  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $G$ , **disjoints** (aucun sommet en commun entre deux chemins)
- **Si** toutes ces familles de chemins sont telles que, pour chaque  $i$ , le chemin partant de  $A_i$  termine forcément en  $B_i$ , **alors** le nombre de telles familles est donné par le déterminant de  $M$ .

# Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .
- On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j}$  est le **nombre** de chemins de  $A_i$  à  $B_j$  dans  $G$ .
- On considère des *familles de  $n$  chemins*  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $G$ , **disjoints** (aucun sommet en commun entre deux chemins)
- **Si** toutes ces familles de chemins sont telles que, pour chaque  $i$ , le chemin partant de  $A_i$  termine forcément en  $B_i$ , **alors** le nombre de telles familles est donné par le déterminant de  $M$ .
- (en fait : le déterminant compte les familles de chemins qui ne se touchent pas, mais avec des signes)

# Le lemme de Gessel-Viennot

(Une version, au moins)

- Un graphe planaire  $G$ , orienté, acyclique.
- $n$  sommets “sources”  $A_1, \dots, A_n$ ,  $n$  sommets “destinations”  $B_1, \dots, B_n$ .
- On définit la matrice  $M = (m_{i,j})$  où  $m_{i,j}$  est le **nombre** de chemins de  $A_i$  à  $B_j$  dans  $G$ .
- On considère des *familles de  $n$  chemins*  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  de  $G$ , **disjoints** (aucun sommet en commun entre deux chemins)
- **Si** toutes ces familles de chemins sont telles que, pour chaque  $i$ , le chemin partant de  $A_i$  termine forcément en  $B_i$ , **alors** le nombre de telles familles est donné par le déterminant de  $M$ .
- (en fait : le déterminant compte les familles de chemins qui ne se touchent pas, mais avec des signes)
- **Preuve** : en décrivant une involution qui change le signe du terme pour les configurations avec croisements.

## Réseau triangulaire : bijection vers les chemins

- On place un sommet de  $G$  au milieu de chaque arête verticale du réseau

## Réseau triangulaire : bijection vers les chemins

- On place un sommet de  $G$  au milieu de chaque arête verticale du réseau
- Arêtes : le long des deux autres directions du réseau triangulaire (on obtient un réseau carré déformé)

## Réseau triangulaire : bijection vers les chemins

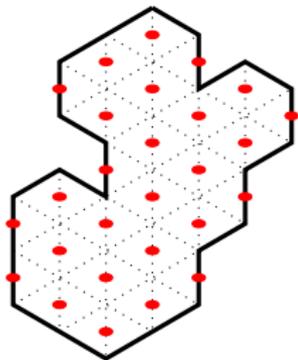
- On place un sommet de  $G$  au milieu de chaque arête verticale du réseau
- Arêtes : le long des deux autres directions du réseau triangulaire (on obtient un réseau carré déformé)
- Bijection des pavages vers les chemins : “tracer les arêtes” qui sont à l’intérieur d’un losange ayant des côtés verticaux ; le troisième type de losange se traduit par un sommet non traversé par les chemins.

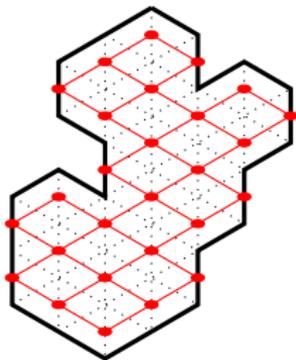
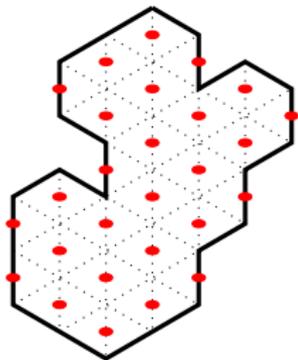
## Réseau triangulaire : bijection vers les chemins

- On place un sommet de  $G$  au milieu de chaque arête verticale du réseau
- Arêtes : le long des deux autres directions du réseau triangulaire (on obtient un réseau carré déformé)
- Bijection des pavages vers les chemins : “tracer les arêtes” qui sont à l’intérieur d’un losange ayant des côtés verticaux ; le troisième type de losange se traduit par un sommet non traversé par les chemins.
- Les points sources et destinations sont les milieux d’arêtes verticales du bord (selon que la région est “à droite” ou “à gauche”)

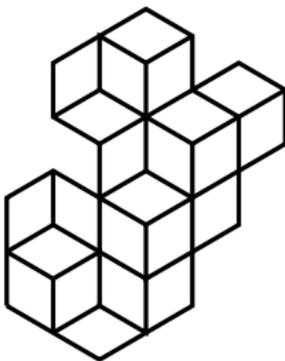
## Réseau triangulaire : bijection vers les chemins

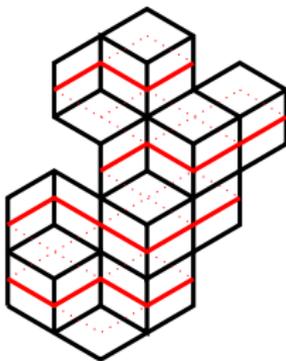
- On place un sommet de  $G$  au milieu de chaque arête verticale du réseau
- Arêtes : le long des deux autres directions du réseau triangulaire (on obtient un réseau carré déformé)
- Bijection des pavages vers les chemins : “tracer les arêtes” qui sont à l’intérieur d’un losange ayant des côtés verticaux ; le troisième type de losange se traduit par un sommet non traversé par les chemins.
- Les points sources et destinations sont les milieux d’arêtes verticales du bord (selon que la région est “à droite” ou “à gauche”)
- Pas évident : toutes les configurations de chemins relient les mêmes sources aux mêmes destinations (ce ne serait pas vrai pour une région non simplement connexe)











## Réseau carré : bijection vers les chemins

- Il y a **aussi** une version Gessel-Viennot pour les pavages sur réseau carré, mais la correspondance est un peu moins évidente

## Réseau carré : bijection vers les chemins

- Il y a **aussi** une version Gessel-Viennot pour les pavages sur réseau carré, mais la correspondance est un peu moins évidente
- On colorie les cellules du réseau en échiquier, et on place un sommet sur les milieux d'arêtes verticales **ayant une cellule noire à droite**.

## Réseau carré : bijection vers les chemins

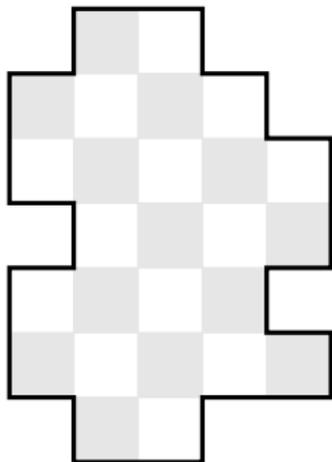
- Il y a **aussi** une version Gessel-Viennot pour les pavages sur réseau carré, mais la correspondance est un peu moins évidente
- On colorie les cellules du réseau en échiquier, et on place un sommet sur les milieux d'arêtes verticales **ayant une cellule noire à droite**.
- Arêtes : pas  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ , et  $(2, 0)$  (sans traverser le bord de la région) ; on obtient une portion de réseau triangulaire.

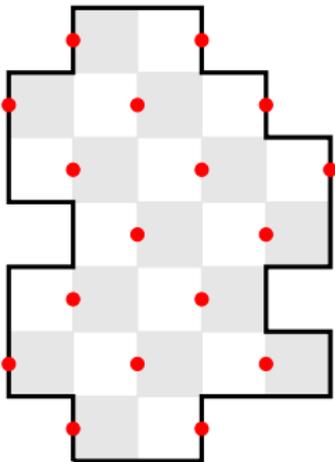
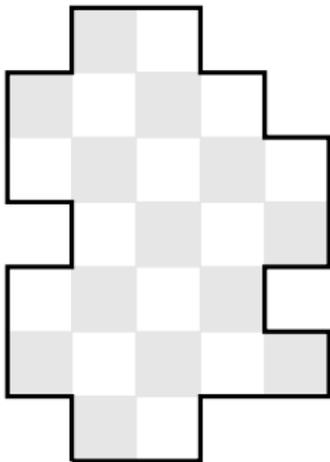
## Réseau carré : bijection vers les chemins

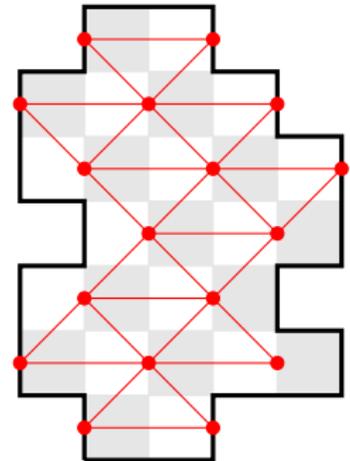
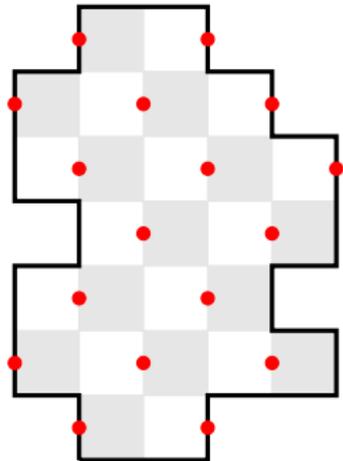
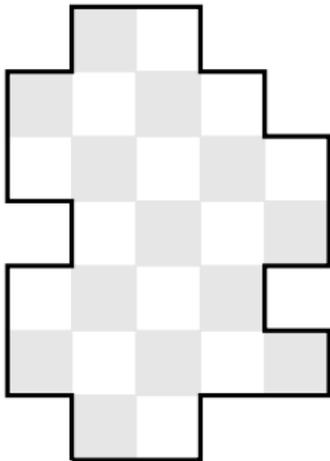
- Il y a **aussi** une version Gessel-Viennot pour les pavages sur réseau carré, mais la correspondance est un peu moins évidente
- On colorie les cellules du réseau en échiquier, et on place un sommet sur les milieux d'arêtes verticales **ayant une cellule noire à droite**.
- Arêtes : pas  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ , et  $(2, 0)$  (sans traverser le bord de la région) ; on obtient une portion de réseau triangulaire.
- Correspondance des pavages aux chemins : trois types de dominos se traduisent par des arêtes de chemins ; le dernier type, par des sommets non traversés.

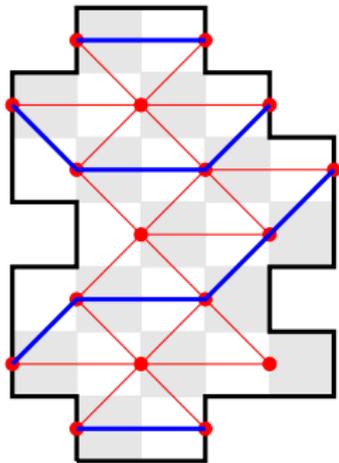
## Réseau carré : bijection vers les chemins

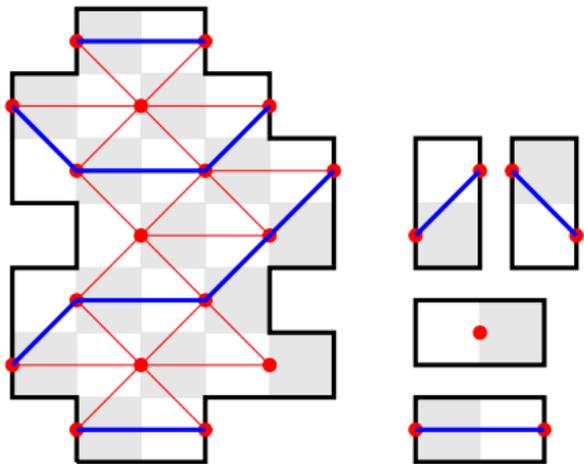
- Il y a **aussi** une version Gessel-Viennot pour les pavages sur réseau carré, mais la correspondance est un peu moins évidente
- On colorie les cellules du réseau en échiquier, et on place un sommet sur les milieux d'arêtes verticales **ayant une cellule noire à droite**.
- Arêtes : pas  $(1, -1)$ ,  $(1, 1)$ , et  $(2, 0)$  (sans traverser le bord de la région) ; on obtient une portion de réseau triangulaire.
- Correspondance des pavages aux chemins : trois types de dominos se traduisent par des arêtes de chemins ; le dernier type, par des sommets non traversés.
- Là encore, dans une région simplement connexe les chemins relient toujours les mêmes paires source/destination

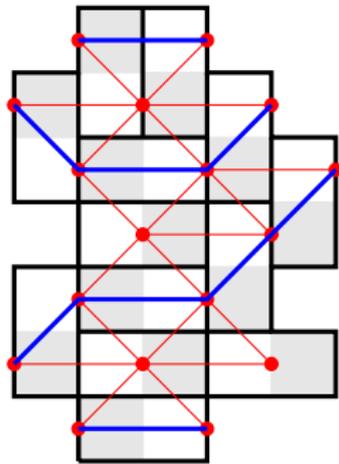
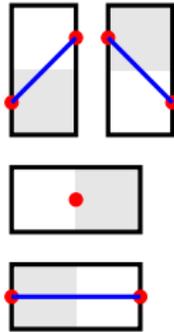
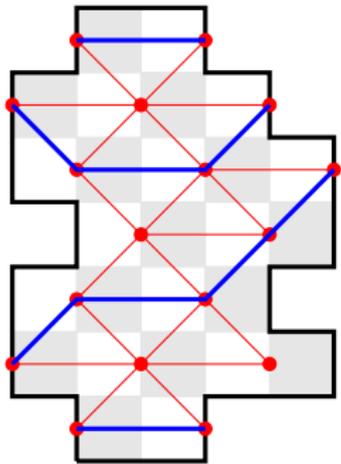












## Résultat des courses

- On exprime le nombre de pavages par un déterminant

## Résultat des courses

- On exprime le nombre de pavages par un déterminant
- La taille du déterminant est contrôlée par le **périmètre** de la région

# Résultat des courses

- On exprime le nombre de pavages par un déterminant
- La taille du déterminant est contrôlée par le **périmètre** de la région
- Les coefficients de la matrice comptent les chemins d'un sommet à un autre dans un graphe acyclique (calcul de proche en proche par parcours de graphe par exemple)

# Résultat des courses

- On exprime le nombre de pavages par un déterminant
- La taille du déterminant est contrôlée par le **périmètre** de la région
- Les coefficients de la matrice comptent les chemins d'un sommet à un autre dans un graphe acyclique (calcul de proche en proche par parcours de graphe par exemple)
- **Question** : est-ce qu'il existe une façon systématique de transformer le "gros déterminant" (matrice d'adjacence bipartie) en le "petit" ?

# Génération aléatoire de pavages

- On part d'une région  $R$  donnée du réseau.

# Génération aléatoire de pavages

- On part d'une région  $R$  donnée du réseau.
- On voudrait tirer des pavages aléatoires uniformes de cette région.

## Génération aléatoire de pavages

- On part d'une région  $R$  donnée du réseau.
- On voudrait tirer des pavages aléatoires uniformes de cette région.
- Ce sont des couplages parfaits d'un graphe de degré borné (par  $c = 3$  sur réseau triangulaire,  $c = 4$  sur réseau carré) : le nombre de pavages est borné par  $c^{A(R)}$ , où  $A$  est l'aire de la région (en nombre de dominos)

## Génération aléatoire de pavages

- On part d'une région  $R$  donnée du réseau.
- On voudrait tirer des pavages aléatoires uniformes de cette région.
- Ce sont des couplages parfaits d'un graphe de degré borné (par  $c = 3$  sur réseau triangulaire,  $c = 4$  sur réseau carré) : le nombre de pavages est borné par  $c^{A(R)}$ , où  $A$  est l'aire de la région (en nombre de dominos)
- À partir du moment où on sait calculer le nombre de pavages d'une région, on sait le faire (mais on va calculer beaucoup de déterminants)

## Algorithme générique

Pour tirer un pavage de  $R$ , en connaissant son nombre  $m(R)$  de pavages :

- Choisir une cellule du bord de  $R$  : elle peut être couverte par au plus 3 dominos  $d_1, d_2, d_3$  ; les possibilités mènent à des régions résiduelles  $R_1, R_2, R_3$ . On calcule les  $m(R_i)$ .
- On choisit de placer le domino  $d_i$  avec probabilité  $m(R_i)/m(R)$ , puis on complète récursivement avec un pavage de  $R_i$ .

# Complexité ?

Supposons une région d'aire  $A$ , avec  $N$  chemins.

- On calcule des déterminants de taille  $N$  ;

## Complexité ?

Supposons une région d'aire  $A$ , avec  $N$  chemins.

- On calcule des déterminants de taille  $N$  ;
- on en calcule 1 ou 2 par domino ;

# Complexité ?

Supposons une région d'aire  $A$ , avec  $N$  chemins.

- On calcule des déterminants de taille  $N$  ;
- on en calcule 1 ou 2 par domino ;
- la mise à jour de la matrice pour le calcul de déterminant est simple, peu de coefficients vont changer (mais ça ne simplifie pas forcément le calcul de déterminants ?)

# Complexité ?

Supposons une région d'aire  $A$ , avec  $N$  chemins.

- On calcule des déterminants de taille  $N$  ;
- on en calcule 1 ou 2 par domino ;
- la mise à jour de la matrice pour le calcul de déterminant est simple, peu de coefficients vont changer (mais ça ne simplifie pas forcément le calcul de déterminants ?)
- La complexité arithmétique est  $O(A.N^\alpha)$  si le calcul d'un déterminant est  $O(N^\alpha)$  : c'est polynomial mais pas folichon (et il faut manipuler des entiers probablement exponentiels en  $N$ )

# Complexité ?

Supposons une région d'aire  $A$ , avec  $N$  chemins.

- On calcule des déterminants de taille  $N$  ;
- on en calcule 1 ou 2 par domino ;
- la mise à jour de la matrice pour le calcul de déterminant est simple, peu de coefficients vont changer (mais ça ne simplifie pas forcément le calcul de déterminants ?)
- La complexité arithmétique est  $O(A.N^\alpha)$  si le calcul d'un déterminant est  $O(N^\alpha)$  : c'est polynomial mais pas folichon (et il faut manipuler des entiers probablement exponentiels en  $N$ )
- Si on exploite la structure d'ordre et de treillis, on peut utiliser des méthodes à base de chaînes de Markov et de CFTP pour faire de la génération exactement uniforme ; au moins pour le cas du réseau triangulaire, **Wilson** montre une borne en  $O(N^2 A \log(A))$