

# Pavages par dominos dans le plan

## Petite école de combinatoire

Philippe Duchon

LaBRI

30 mai 2022

# Retour sur les fonctions de hauteur

- on fixe une région  $R$ , et ça définit une “hauteur” pour chaque sommet du bord de  $R$
- chaque sommet de  $R$  a une hauteur fixée *a priori* modulo 4 (modulo 3, pour le réseau triangulaire)
- correspondance bijective entre les pavages de la région, et les fonctions de hauteur  $f : R \rightarrow \mathbb{Z}$ 
  - qui respectent les conditions sur le bord de  $R$  ;
  - qui respectent la contrainte modulo 3 ou 4 ;
  - qui varient d'au plus  $\pm 3$  le long de chaque arête

## Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;

# Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;
- si  $h$  est une fonction de hauteur et qu'il y a un arc  $(P, P')$ , alors  $h(P') \in \{h(P) + 1, h(P) - d\}$  ( $d = 3$  pour réseau carré,  $d = 2$  pour réseau triangulaire) ;

# Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;
- si  $h$  est une fonction de hauteur et qu'il y a un arc  $(P, P')$ , alors  $h(P') \in \{h(P) + 1, h(P) - d\}$  ( $d = 3$  pour réseau carré,  $d = 2$  pour réseau triangulaire) ;
- en particulier,  $h(P') \leq h(P) + 1$  ;

# Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;
- si  $h$  est une fonction de hauteur et qu'il y a un arc  $(P, P')$ , alors  $h(P') \in \{h(P) + 1, h(P) - d\}$  ( $d = 3$  pour réseau carré,  $d = 2$  pour réseau triangulaire) ;
- en particulier,  $h(P') \leq h(P) + 1$  ;
- en itérant le long d'un chemin orienté : si de  $P$  à  $P'$  il y a un chemin de longueur  $k$ , alors  $h(P') \leq h(P) + k$  ;

# Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;
- si  $h$  est une fonction de hauteur et qu'il y a un arc  $(P, P')$ , alors  $h(P') \in \{h(P) + 1, h(P) - d\}$  ( $d = 3$  pour réseau carré,  $d = 2$  pour réseau triangulaire) ;
- en particulier,  $h(P') \leq h(P) + 1$  ;
- en itérant le long d'un chemin orienté : si de  $P$  à  $P'$  il y a un chemin de longueur  $k$ , alors  $h(P') \leq h(P) + k$  ;
- donc pour toute fonction de hauteur  $h$ ,  
 $h(Q) \leq h(P) + \vec{d}(P, Q)$ .

# Fonctions de hauteur minimale et maximale

- on considère le graphe orienté où chaque arête a une case *noire* à sa gauche ;  $\vec{d}$  désigne la distance de graphe orienté ;
- si  $h$  est une fonction de hauteur et qu'il y a un arc  $(P, P')$ , alors  $h(P') \in \{h(P) + 1, h(P) - d\}$  ( $d = 3$  pour réseau carré,  $d = 2$  pour réseau triangulaire) ;
- en particulier,  $h(P') \leq h(P) + 1$  ;
- en itérant le long d'un chemin orienté : si de  $P$  à  $P'$  il y a un chemin de longueur  $k$ , alors  $h(P') \leq h(P) + k$  ;
- donc pour toute fonction de hauteur  $h$ ,  
 $h(Q) \leq h(P) + \vec{d}(P, Q)$ .
- En combinant ( $P$  parcourt les points de hauteur fixée) :  
 $h(Q) \leq f_{\max}(Q) = \min_{P \in F} (h(P) + \vec{d}(P, Q))$  ;  
 $h(Q) \geq f_{\min}(Q) = \min_{P \in F} (h(P) - \vec{d}(Q, P))$ .

# Structure de l'ensemble des pavages

Une fois fixée une région  $R$ , l'ensemble des fonctions de hauteur a un **ordre partiel**

- avec une opération binaire  $\wedge$  (minimum point à point ; plus grande fonction inférieure aux deux) ;

# Structure de l'ensemble des pavages

Une fois fixée une région  $R$ , l'ensemble des fonctions de hauteur a un **ordre partiel**

- avec une opération binaire  $\wedge$  (minimum point à point ; plus grande fonction inférieure aux deux) ;
- et une opération binaire  $\vee$  (maximum point à point ; plus petite fonction supérieure aux deux) ;

# Structure de l'ensemble des pavages

Une fois fixée une région  $R$ , l'ensemble des fonctions de hauteur a un **ordre partiel**

- avec une opération binaire  $\wedge$  (minimum point à point ; plus grande fonction inférieure aux deux) ;
- et une opération binaire  $\vee$  (maximum point à point ; plus petite fonction supérieure aux deux) ;
- les deux opérations sont commutatives et associatives, et distributives l'une par rapport à l'autre ;

# Structure de l'ensemble des pavages

Une fois fixée une région  $R$ , l'ensemble des fonctions de hauteur a un **ordre partiel**

- avec une opération binaire  $\wedge$  (minimum point à point ; plus grande fonction inférieure aux deux) ;
- et une opération binaire  $\vee$  (maximum point à point ; plus petite fonction supérieure aux deux) ;
- les deux opérations sont commutatives et associatives, et distributives l'une par rapport à l'autre ;
- c'est un **treillis distributif** fini.

## Ordre partiel : relation de couverture

- Si deux fonctions de hauteur diffèrent en **un seul point**  $P$ , forcément la différence est exactement  $\pm d$  ; et la plus grande couvre la plus petite, il ne peut pas y avoir de fonction de hauteur entre les deux.

## Ordre partiel : relation de couverture

- Si deux fonctions de hauteur diffèrent en **un seul point**  $P$ , forcément la différence est exactement  $\pm d$  ; et la plus grande couvre la plus petite, il ne peut pas y avoir de fonction de hauteur entre les deux.
- Un peu moins évident : la relation de couverture est uniquement de cette forme

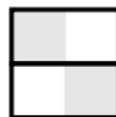
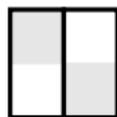
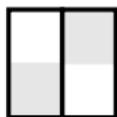
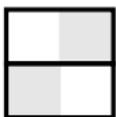
## Ordre partiel : relation de couverture

- Si deux fonctions de hauteur diffèrent en **un seul point**  $P$ , forcément la différence est exactement  $\pm d$ ; et la plus grande couvre la plus petite, il ne peut pas y avoir de fonction de hauteur entre les deux.
- Un peu moins évident : la relation de couverture est uniquement de cette forme
- **Lemme** : si  $h$  est une fonction de hauteur autre que  $h_{\min}$ , il y a un point  $P$  tel qu'on peut diminuer  $h(P)$  de  $d$  et obtenir une fonction de hauteur (chercher un maximum local parmi les points où la différence avec  $h_{\min}$  est maximale)

## Ordre partiel : relation de couverture

- Si deux fonctions de hauteur diffèrent en **un seul point**  $P$ , forcément la différence est exactement  $\pm d$ ; et la plus grande couvre la plus petite, il ne peut pas y avoir de fonction de hauteur entre les deux.
- Un peu moins évident : la relation de couverture est uniquement de cette forme
- **Lemme** : si  $h$  est une fonction de hauteur autre que  $h_{\min}$ , il y a un point  $P$  tel qu'on peut diminuer  $h(P)$  de  $d$  et obtenir une fonction de hauteur (chercher un maximum local parmi les points où la différence avec  $h_{\min}$  est maximale)
- **Conséquence** : l'ensemble des pavages est connexe pour les "flips" qui correspondent à la modification de la hauteur d'un seul point

# Les flips



## Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent

# Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent
- Pour des régions très particulières, il y a des formules connues. . .

# Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent
- Pour des régions très particulières, il y a des formules connues. . .
  - pavages par losanges d'un hexagone (MacMahon)

# Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent
- Pour des régions très particulières, il y a des formules connues. . .
  - pavages par losanges d'un hexagone (MacMahon)
  - pavages par dominos d'un rectangle (Kasteleyn)

# Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent
- Pour des régions très particulières, il y a des formules connues. . .
  - pavages par losanges d'un hexagone (MacMahon)
  - pavages par dominos d'un rectangle (Kasteleyn)
  - pavages par dominos d'un "diamant aztèque" (Propp *et al.*)

# Compter les pavages

- On a une région  $R$  dont on sait qu'elle est pavable ; on voudrait savoir **combien** de pavages différents existent
- Pour des régions très particulières, il y a des formules connues . . .
  - pavages par losanges d'un hexagone (MacMahon)
  - pavages par dominos d'un rectangle (Kasteleyn)
  - pavages par dominos d'un "diamant aztèque" (Propp *et al.*)
- L'outil typique : calcul de déterminants (Kasteleyn ; Gessel-Viennot sur réseau triangulaire)

## Un déterminant, vraiment ?

- Un pavage d'une région  $R$ , c'est la même chose qu'un **couplage parfait** d'une région du réseau dual, qui est biparti.

## Un déterminant, vraiment ?

- Un pavage d'une région  $R$ , c'est la même chose qu'un **couplage parfait** d'une région du réseau dual, qui est biparti.
- En toute généralité :  $G$  un graphe biparti, avec  $n$  sommets dans chaque classe de couleur.

# Un déterminant, vraiment ?

- Un pavage d'une région  $R$ , c'est la même chose qu'un **couplage parfait** d'une région du réseau dual, qui est biparti.
- En toute généralité :  $G$  un graphe biparti, avec  $n$  sommets dans chaque classe de couleur.
- On peut numéroter arbitrairement les sommets de chaque classe, et former une matrice d'adjacence bipartie  $(m_{i,j})$  avec  $m_{i,j}$  le nombre d'arêtes entre le  $i$ -ème sommet noir et le  $j$ -ème sommet blanc (0 s'ils ne sont pas voisins).

# Un déterminant, vraiment ?

- Un pavage d'une région  $R$ , c'est la même chose qu'un **couplage parfait** d'une région du réseau dual, qui est biparti.
- En toute généralité :  $G$  un graphe biparti, avec  $n$  sommets dans chaque classe de couleur.
- On peut numéroter arbitrairement les sommets de chaque classe, et former une matrice d'adjacence bipartie  $(m_{i,j})$  avec  $m_{i,j}$  le nombre d'arêtes entre le  $i$ -ème sommet noir et le  $j$ -ème sommet blanc (0 s'ils ne sont pas voisins).
- À un couplage parfait, on fait correspondre un choix, dans la matrice, d'exactly  $n$  coefficients non nuls, un par ligne **et** un par colonne.

# Un déterminant, vraiment ?

- Un pavage d'une région  $R$ , c'est la même chose qu'un **couplage parfait** d'une région du réseau dual, qui est biparti.
- En toute généralité :  $G$  un graphe biparti, avec  $n$  sommets dans chaque classe de couleur.
- On peut numéroter arbitrairement les sommets de chaque classe, et former une matrice d'adjacence bipartie  $(m_{i,j})$  avec  $m_{i,j}$  le nombre d'arêtes entre le  $i$ -ème sommet noir et le  $j$ -ème sommet blanc (0 s'ils ne sont pas voisins).
- À un couplage parfait, on fait correspondre un choix, dans la matrice, d'exactly  $n$  coefficients non nuls, un par ligne **et** un par colonne.
- En tenant compte d'éventuelles arêtes multiples, le **nombre** de couplages parfaits est "simplement"

$$\sum_{s \in S_n} \prod_{1 \leq i \leq n} m_{i,s(i)}.$$

# La méthode “permanent-déterminant” (Kasteleyn ; Kuperberg)

## Théorème (Kasteleyn)

Si  $G$  est un graphe biparti **planaire** (avec  $n$  sommets de chaque couleur), on peut modifier la matrice d'adjacence bipartie **en changeant le signe de certains coefficients** de telle sorte que tous les termes du déterminant aient le même signe.

# La méthode “permanent-déterminant” (Kasteleyn ; Kuperberg)

## Théorème (Kasteleyn)

Si  $G$  est un graphe biparti **planaire** (avec  $n$  sommets de chaque couleur), on peut modifier la matrice d'adjacence bipartie **en changeant le signe de certains coefficients** de telle sorte que tous les termes du déterminant aient le même signe.

**Conséquence** : le déterminant est alors, au signe près, le permanent.

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.
- Ce dont on a besoin, c'est que quand on prend deux couplages  $M_1$  et  $M_2$ , les termes associés aient le même signe.

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.
- Ce dont on a besoin, c'est que quand on prend deux couplages  $M_1$  et  $M_2$ , les termes associés aient le même signe.
- La différence symétrique entre deux couplages, c'est une union de cycles ; on se limite au cas où c'est un seul cycle (qui entoure un nombre pair de sommets).

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.
- Ce dont on a besoin, c'est que quand on prend deux couplages  $M_1$  et  $M_2$ , les termes associés aient le même signe.
- La différence symétrique entre deux couplages, c'est une union de cycles ; on se limite au cas où c'est un seul cycle (qui entoure un nombre pair de sommets).
- Il faut donc que le nombre d'arêtes "négatives" du cycle, compense l'éventuelle différence de signe entre les termes des deux couplages (chacun donné par une permutation,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ )

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.
- Ce dont on a besoin, c'est que quand on prend deux couplages  $M_1$  et  $M_2$ , les termes associés aient le même signe.
- La différence symétrique entre deux couplages, c'est une union de cycles ; on se limite au cas où c'est un seul cycle (qui entoure un nombre pair de sommets).
- Il faut donc que le nombre d'arêtes "négatives" du cycle, compense l'éventuelle différence de signe entre les termes des deux couplages (chacun donné par une permutation,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ )
- Mais  $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$  est un cycle de longueur  $n$  : sa parité est l'opposée de celle de  $n$ .

## Schéma de la preuve (version Kuperberg)

- On va sélectionner certaines arêtes pour recevoir un changement de signe.
- Ce dont on a besoin, c'est que quand on prend deux couplages  $M_1$  et  $M_2$ , les termes associés aient le même signe.
- La différence symétrique entre deux couplages, c'est une union de cycles ; on se limite au cas où c'est un seul cycle (qui entoure un nombre pair de sommets).
- Il faut donc que le nombre d'arêtes "négatives" du cycle, compense l'éventuelle différence de signe entre les termes des deux couplages (chacun donné par une permutation,  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$ )
- Mais  $\sigma_2^{-1} \circ \sigma_1$  est un cycle de longueur  $n$  : sa parité est l'opposée de celle de  $n$ .
- Il suffit donc d'assurer que tout cycle (entourant un nombre pair de sommets) de longueur  $4k$  ait un nombre impair d'arêtes négatives, et tout cycle de longueur  $4k + 2$ , un nombre pair.

## Schéma de preuve : construction

- On remarque que le nombre de faces de degré  $4k$  est forcément pair (argument de parité sur la caractéristique d'Euler).

## Schéma de preuve : construction

- On remarque que le nombre de faces de degré (nombre d'arêtes)  $4k$  est forcément pair (argument de parité sur la caractéristique d'Euler).
- Donc on peut choisir un appariement deux à deux de ces faces de degré  $4k$  ; puis, un chemin de chaque face à sa face appariée.

## Schéma de preuve : construction

- On remarque que le nombre de faces de degré (nombre d'arêtes)  $4k$  est forcément pair (argument de parité sur la caractéristique d'Euler).
- Donc on peut choisir un appariement deux à deux de ces faces de degré  $4k$  ; puis, un chemin de chaque face à sa face appariée.
- Chaque arête du graphe reçoit un signe négatif, si elle est traversée un nombre impair de fois par ces chemins ; ainsi les faces de degré  $4k + 2$  auront un nombre pair d'arêtes négatives, et les faces de degré  $4k$ , un nombre impair.

## Schéma de preuve : construction

- On remarque que le nombre de faces de degré (nombre d'arêtes)  $4k$  est forcément pair (argument de parité sur la caractéristique d'Euler).
- Donc on peut choisir un appariement deux à deux de ces faces de degré  $4k$  ; puis, un chemin de chaque face à sa face appariée.
- Chaque arête du graphe reçoit un signe négatif, si elle est traversée un nombre impair de fois par ces chemins ; ainsi les faces de degré  $4k + 2$  auront un nombre pair d'arêtes négatives, et les faces de degré  $4k$ , un nombre impair.
- Par le même argument de parité, tout cycle entourant un nombre pair de sommets aura la même propriété (on efface tout ce qui est à l'extérieur du cycle).

## Et pour nos pavages ?

- Sur réseau triangulaire : les faces (autres que la face externe) sont des hexagones, pas besoin de distribuer de signes.

## Et pour nos pavages ?

- Sur réseau triangulaire : les faces (autres que la face externe) sont des hexagones, pas besoin de distribuer de signes.
- Sur réseau carré : les faces (autres que la face externe) sont des carrés, il faut bien distribuer des signes ; pour certaines régions simples on peut le faire systématiquement (par exemple, pour un rectangle : une arête verticale sur deux aura un signe négatif).

## Et pour nos pavages ?

- Sur réseau triangulaire : les faces (autres que la face externe) sont des hexagones, pas besoin de distribuer de signes.
- Sur réseau carré : les faces (autres que la face externe) sont des carrés, il faut bien distribuer des signes ; pour certaines régions simples on peut le faire systématiquement (par exemple, pour un rectangle : une arête verticale sur deux aura un signe négatif).
- Au final, on a une méthode constructive qui permet d'exprimer le nombre de pavages, comme le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont 0, 1 et  $-1$ .

## Et pour nos pavages ?

- Sur réseau triangulaire : les faces (autres que la face externe) sont des hexagones, pas besoin de distribuer de signes.
- Sur réseau carré : les faces (autres que la face externe) sont des carrés, il faut bien distribuer des signes ; pour certaines régions simples on peut le faire systématiquement (par exemple, pour un rectangle : une arête verticale sur deux aura un signe négatif).
- Au final, on a une méthode constructive qui permet d'exprimer le nombre de pavages, comme le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont 0, 1 et  $-1$ .
- La taille de la matrice, c'est le nombre de sommets dans chaque classe de couleur de sommets ; en termes de pavages, l'aire de la région (comptée en nombre de tuiles).

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .
- Un pavage par losanges peut s'interpréter de manière bijective comme une configuration de chemins sur réseau carré, qui ne s'intersectent pas, et qui relient certains points du bord de  $R$  (arêtes dans une des trois directions).

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .
- Un pavage par losanges peut s'interpréter de manière bijective comme une configuration de chemins sur réseau carré, qui ne s'intersectent pas, et qui relie certains points du bord de  $R$  (arêtes dans une des trois directions).
- Le **lemme de Gessel-Viennot** exprime alors le nombre de telles configurations de chemins, comme le déterminant d'une matrice (taille : nombre de chemins, soit bornée par le périmètre ; coefficients : nombre de chemins dirigés d'une extrémité à une autre)

## D'autres déterminants ?

- Sur réseau triangulaire, il y a un autre déterminant qui permet d'exprimer le nombre de pavages (par losanges) d'une région  $R$ .
- Un pavage par losanges peut s'interpréter de manière bijective comme une configuration de chemins sur réseau carré, qui ne s'intersectent pas, et qui relie certains points du bord de  $R$  (arêtes dans une des trois directions).
- Le **lemme de Gessel-Viennot** exprime alors le nombre de telles configurations de chemins, comme le déterminant d'une matrice (taille : nombre de chemins, soit bornée par le périmètre ; coefficients : nombre de chemins dirigés d'une extrémité à une autre)
- **Y a-t-il une façon systématique de transformer l'un des déterminants en l'autre ?**

