

Pavages par dominos dans le plan

Petite école de combinatoire

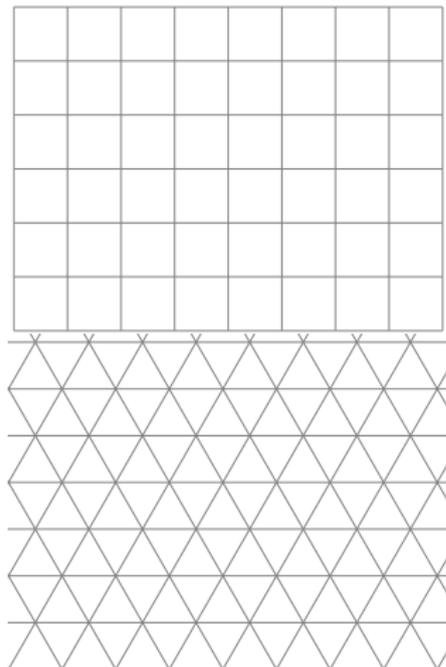
Philippe Duchon

LaBRI

16 mai 2022

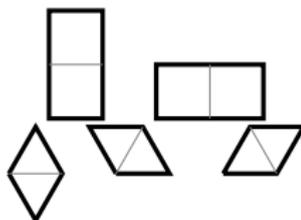
Personnages

- un réseau régulier dans le plan : carré ou triangulaire



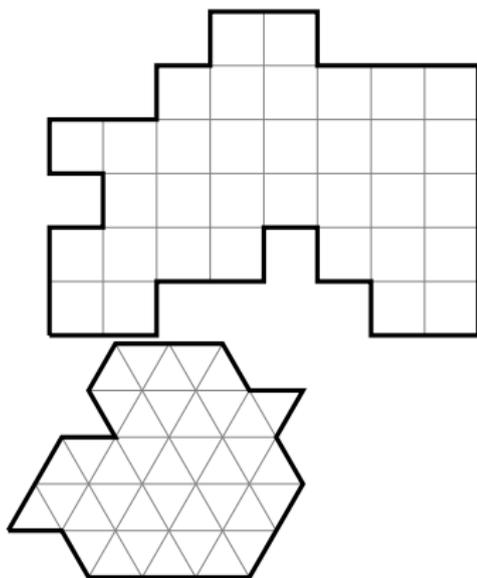
Personnages

- un réseau régulier dans le plan : carré ou triangulaire
- des “dominos” : deux cellules voisines



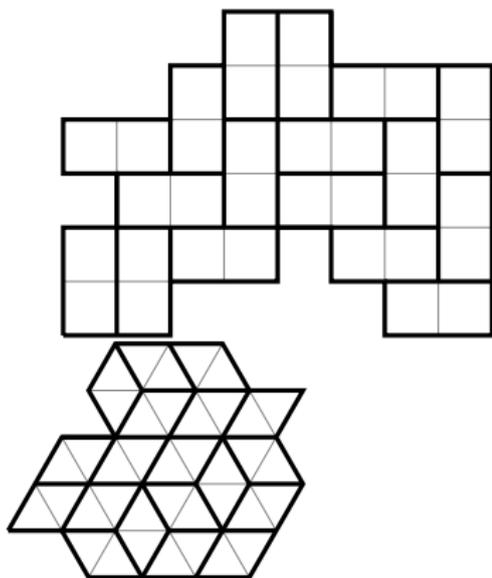
Personnages

- un réseau régulier dans le plan : carré ou triangulaire
- des “dominos” : deux cellules voisines
- une région du réseau : dans un premier temps, **finie** et **simplement connexe**



Personnages

- un réseau régulier dans le plan : carré ou triangulaire
- des “dominos” : deux cellules voisines
- une région du réseau : dans un premier temps, **finie** et **simplement connexe**
- les objets : **pavages** de la région par des dominos



Questions

Une fois fixée une région :

- Est-ce qu'un pavage existe ?

Questions

Une fois fixée une région :

- Est-ce qu'un pavage existe ?
- **Combien** de pavages existent ?

Questions

Une fois fixée une région :

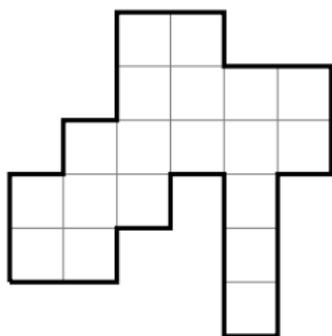
- Est-ce qu'un pavage existe ?
- **Combien** de pavages existent ?
- Est-ce qu'on a de (bons) algorithmes pour tirer un **pavage aléatoire** (uniforme) ?

Questions

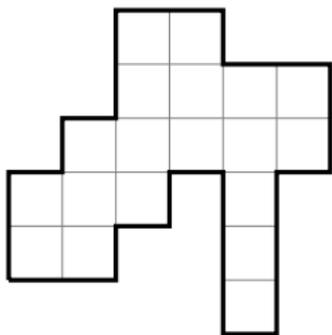
Une fois fixée une région :

- Est-ce qu'un pavage existe ?
- **Combien** de pavages existent ?
- Est-ce qu'on a de (bons) algorithmes pour tirer un **pavage aléatoire** (uniforme) ?
- À quoi ressemblent de tels pavages aléatoires ?

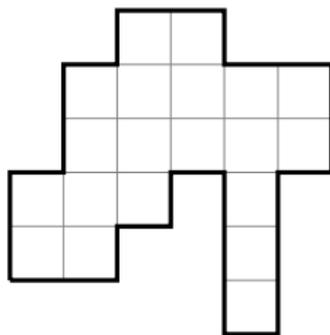
Pavable ou pas ?



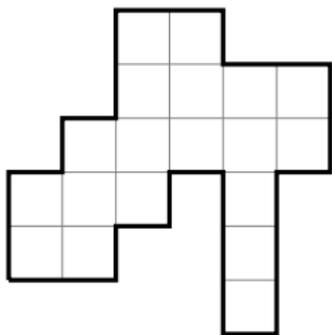
Pavable ou pas ?



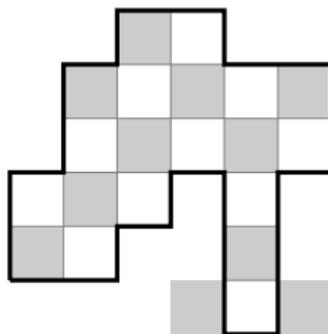
Non ! l'aire est impaire



Pavable ou pas ?



Non ! l'aire est impaire



Non ! pas autant de cases noires que de blanches

Critère de Conway-Lagarias-Thurston

- Attribue une “hauteur” entière à chaque sommet d’un chemin simple du réseau

Critère de Conway-Lagarias-Thurston

- Attribue une “hauteur” entière à chaque sommet d’un chemin simple du réseau
- Valeur arbitraire (mettons 0) pour le point de départ, puis

Critère de Conway-Lagarias-Thurston

- Attribue une “hauteur” entière à chaque sommet d’un chemin simple du réseau
- Valeur arbitraire (mettons 0) pour le point de départ, puis
 - augmente de 1 le long d’une arête ayant une case noire sur sa gauche ;

Critère de Conway-Lagarias-Thurston

- Attribue une “hauteur” entière à chaque sommet d’un chemin simple du réseau
- Valeur arbitraire (mettons 0) pour le point de départ, puis
 - augmente de 1 le long d’une arête ayant une case noire sur sa gauche ;
 - diminue de 1 le long d’une arête ayant une case blanche sur sa gauche.

Critère de Conway-Lagarias-Thurston

- Attribue une “hauteur” entière à chaque sommet d’un chemin simple du réseau
- Valeur arbitraire (mettons 0) pour le point de départ, puis
 - augmente de 1 le long d’une arête ayant une case noire sur sa gauche ;
 - diminue de 1 le long d’une arête ayant une case blanche sur sa gauche.
- **Lemme (Conway-Lagarias)** : quand on calcule les hauteurs le long du bord d’une région **pavable**, la hauteur du dernier point égale celle du premier.

Preuve du “critère”

- **En fait** : quand on fait le tour en sens horaire d'une région simplement connexe, la différence de hauteur vaut 4 fois la différence entre les nombre de cases noires et de cases blanches à l'intérieur (3 fois, sur réseau triangulaire).

Preuve du “critère”

- **En fait** : quand on fait le tour en sens horaire d'une région simplement connexe, la différence de hauteur vaut 4 fois la différence entre les nombre de cases noires et de cases blanches à l'intérieur (3 fois, sur réseau triangulaire).
- **Argument élémentaire** : double comptage des arêtes qui bordent les cases de l'intérieur.

Preuve du “critère”

- **En fait** : quand on fait le tour en sens horaire d'une région simplement connexe, la différence de hauteur vaut 4 fois la différence entre les nombre de cases noires et de cases blanches à l'intérieur (3 fois, sur réseau triangulaire).
- **Argument élémentaire** : double comptage des arêtes qui bordent les cases de l'intérieur.
- Résultat, le critère n'est pas plus “malin” que le comptage des cases blanches et noires (mais il se calcule en temps proportionnel à la longueur du bord, pas à l'aire de la région)

Preuve du “critère”

- **En fait** : quand on fait le tour en sens horaire d'une région simplement connexe, la différence de hauteur vaut 4 fois la différence entre les nombre de cases noires et de cases blanches à l'intérieur (3 fois, sur réseau triangulaire).
- **Argument élémentaire** : double comptage des arêtes qui bordent les cases de l'intérieur.
- Résultat, le critère n'est pas plus “malin” que le comptage des cases blanches et noires (mais il se calcule en temps proportionnel à la longueur du bord, pas à l'aire de la région)
- **Plus généralement**, Conway et Lagarias associent à un jeu de tuiles un **groupe**, en assurant que si une région (simplement connexe) est pavable par ces tuiles, alors le contour de la région correspond au neutre du groupe (et pour les dominos, ce groupe c'est \mathbb{Z}).

Fonctions de hauteur

Pour les dominos sur réseau carré ou triangulaire, Thurston montre comment déterminer simplement si une région est pavable, avec la notion de “fonction de hauteur” associée à un pavage par dominos.

- On fixe arbitrairement la hauteur d'un point du bord.

Fonctions de hauteur

Pour les dominos sur réseau carré ou triangulaire, Thurston montre comment déterminer simplement si une région est pavable, avec la notion de “fonction de hauteur” associée à un pavage par dominos.

- On fixe arbitrairement la hauteur d'un point du bord.
- Le long de tout chemin suivant les bords de dominos, on calcule les hauteurs comme avant (+1 si on longe une case noire à gauche, -1 si une case blanche)

Fonctions de hauteur

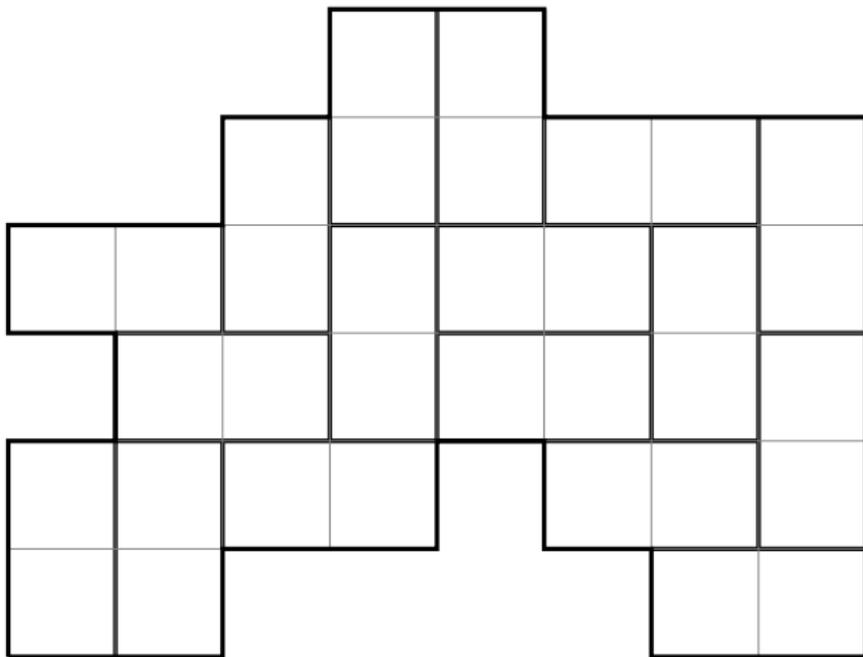
Pour les dominos sur réseau carré ou triangulaire, Thurston montre comment déterminer simplement si une région est pavable, avec la notion de “fonction de hauteur” associée à un pavage par dominos.

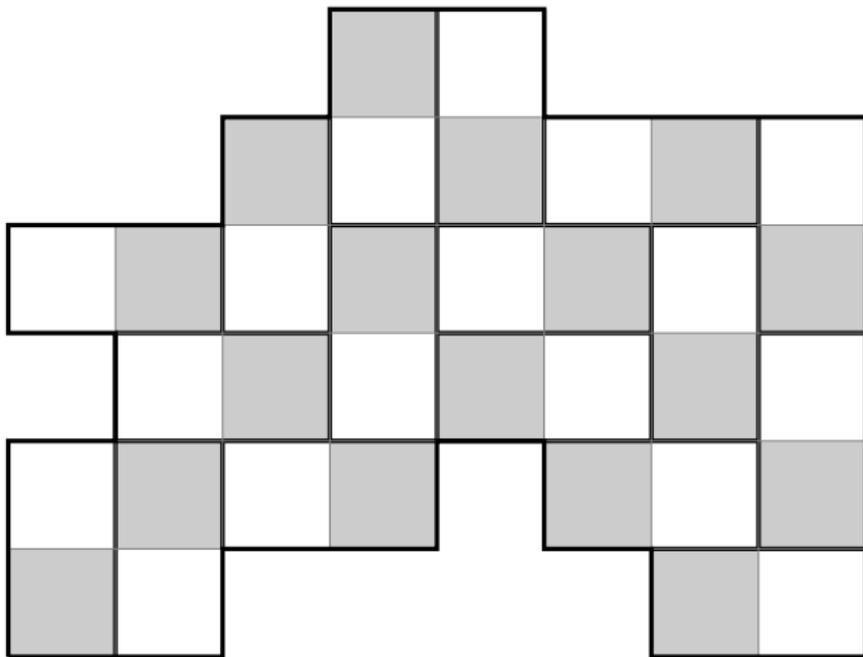
- On fixe arbitrairement la hauteur d'un point du bord.
- Le long de tout chemin suivant les bords de dominos, on calcule les hauteurs comme avant (+1 si on longe une case noire à gauche, -1 si une case blanche)
- **Lemme** : la valeur trouvée pour un sommet donné, ne dépend pas du chemin utilisé.

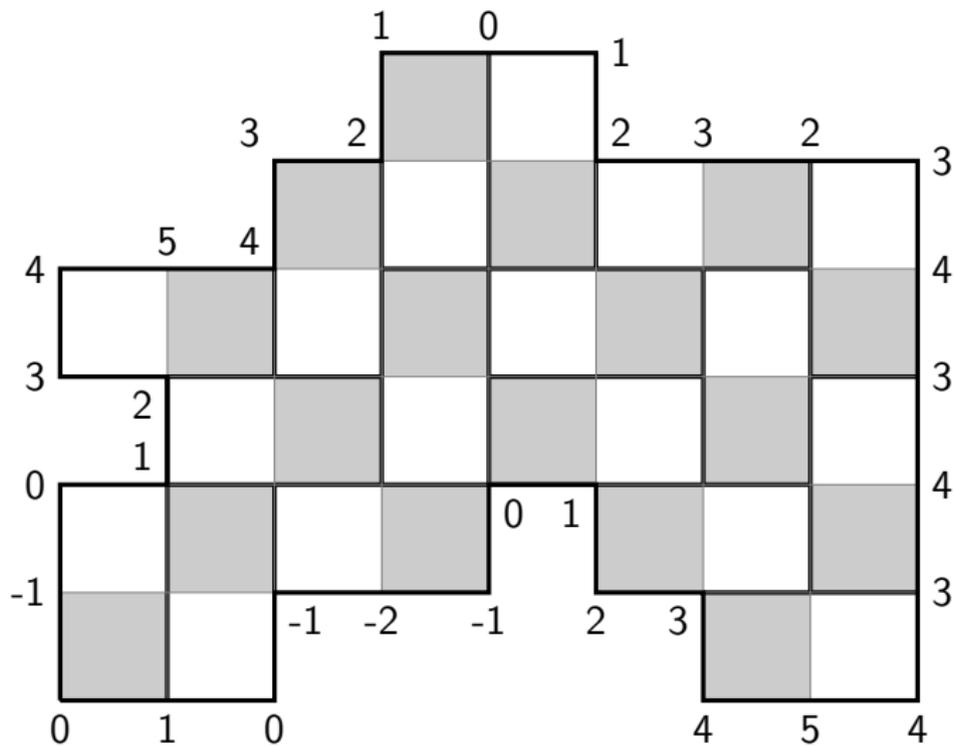
Fonctions de hauteur

Pour les dominos sur réseau carré ou triangulaire, Thurston montre comment déterminer simplement si une région est pavable, avec la notion de “fonction de hauteur” associée à un pavage par dominos.

- On fixe arbitrairement la hauteur d'un point du bord.
- Le long de tout chemin suivant les bords de dominos, on calcule les hauteurs comme avant (+1 si on longe une case noire à gauche, -1 si une case blanche)
- **Lemme** : la valeur trouvée pour un sommet donné, ne dépend pas du chemin utilisé.
- Argument clé : la variation de hauteur le long d'un contour simple fermé ne change pas si on “fait le tour” d'une pièce ; en l'absence de trous dans la région, on peut ainsi se ramener à un contour vide.







Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs
 - 1 si x est impair et y pair

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs
 - 1 si x est impair et y pair
 - 2 si x et y sont impairs

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs
 - 1 si x est impair et y pair
 - 2 si x et y sont impairs
 - 3 si x est pair et y impair

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0, 0)$ est sur le bord, et de hauteur 0 ; et que la case $[0, 1] \times [0, 1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x, y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs
 - 1 si x est impair et y pair
 - 2 si x et y sont impairs
 - 3 si x est pair et y impair
- **Toute fonction** des points d'une région vers \mathbb{Z} , qui satisfait ces conditions modulo et qui varie seulement de ± 1 ou ± 3 le long de chaque arête, **est** la fonction de hauteur d'un pavage

Fonctions de hauteur

- Pour un pavage par dominos donné, on a une fonction de hauteur (on convient que le point $(0,0)$ est sur le bord, et de hauteur 0; et que la case $[0,1] \times [0,1]$ est noire).
- **Remarque** : la hauteur d'un point donné (x,y) n'est pas fixée *a priori*, mais elle l'est **modulo 4** :
 - 0 si x et y sont pairs
 - 1 si x est impair et y pair
 - 2 si x et y sont impairs
 - 3 si x est pair et y impair
- **Toute fonction** des points d'une région vers \mathbb{Z} , qui satisfait ces conditions modulo et qui varie seulement de ± 1 ou ± 3 le long de chaque arête, **est** la fonction de hauteur d'un pavage
- Argument simple : la seule façon de respecter les conditions modulo sur les 4 points autour d'une case, c'est d'avoir trois arêtes à variation ± 1 et la dernière à variation ± 3 ; en effaçant les arêtes ± 3 , on obtient un pavage.

Ordre sur les fonctions de hauteur

- On définit un ordre partiel (ordre produit) sur les fonctions de hauteur d'une même région R : $f \leq g$ si pour tout (x, y) , $f(x, y) \leq g(x, y)$.

Ordre sur les fonctions de hauteur

- On définit un ordre partiel (ordre produit) sur les fonctions de hauteur d'une même région R : $f \leq g$ si pour tout (x, y) , $f(x, y) \leq g(x, y)$.
- **Remarque** : pour deux fonctions de hauteur f et g , leur *minimum point par point*, $h(x, y) = \min(f(x, y), g(x, y))$, est automatiquement une fonction de hauteur (et $h \leq g$, $h \leq f$)

Ordre sur les fonctions de hauteur

- On définit un ordre partiel (ordre produit) sur les fonctions de hauteur d'une même région R : $f \leq g$ si pour tout (x, y) , $f(x, y) \leq g(x, y)$.
- **Remarque** : pour deux fonctions de hauteur f et g , leur *minimum point par point*, $h(x, y) = \min(f(x, y), g(x, y))$, est automatiquement une fonction de hauteur (et $h \leq g$, $h \leq f$)
- **Donc** il y a une fonction de hauteur minimale f_{\min}^R , plus petite que toutes les autres.

Ordre sur les fonctions de hauteur

- On définit un ordre partiel (ordre produit) sur les fonctions de hauteur d'une même région R : $f \leq g$ si pour tout (x, y) , $f(x, y) \leq g(x, y)$.
- **Remarque** : pour deux fonctions de hauteur f et g , leur *minimum point par point*, $h(x, y) = \min(f(x, y), g(x, y))$, est automatiquement une fonction de hauteur (et $h \leq g$, $h \leq f$)
- **Donc** il y a une fonction de hauteur minimale f_{\min}^R , plus petite que toutes les autres.
- **Thurston** : algorithme qui, soit calcule f_{\min}^R , soit détermine qu'il n'y a pas de fonction de hauteurs, donc pas de pavage (*a priori*, en temps $O(a(R) + p(R))$, avec $a(R)$ l'aire et $p(R)$ le périmètre de R).

L'algorithme de Thurston (revu par Propp)

- On oriente toutes les arêtes dans le sens horaire autour des cases noires.

L'algorithme de Thurston (revu par Propp)

- On oriente toutes les arêtes dans le sens horaire autour des cases noires.
- On définit la distance orientée entre deux points : longueur du plus court chemin n'utilisant que des arêtes orientées (ce n'est pas une distance : pas symétrique)

L'algorithme de Thurston (revu par Propp)

- On oriente toutes les arêtes dans le sens horaire autour des cases noires.
- On définit la distance orientée entre deux points : longueur du plus court chemin n'utilisant que des arêtes orientées (ce n'est pas une distance : pas symétrique)
- On part de la hauteur des sommets du bord B de R (commune à toute fonction de hauteur)

L'algorithme de Thurston (revu par Propp)

- On oriente toutes les arêtes dans le sens horaire autour des cases noires.
- On définit la distance orientée entre deux points : longueur du plus court chemin n'utilisant que des arêtes orientées (ce n'est pas une distance : pas symétrique)
- On part de la hauteur des sommets du bord B de R (commune à toute fonction de hauteur)
- On a alors une formule pour f_{\min}^R :

$$f_{\min}^R(x, y) = \max_{(z, t) \in B} h(z, t) - \bar{d}((z, t), (x, y))$$

L'algorithme de Thurston (revu par Propp)

- On oriente toutes les arêtes dans le sens horaire autour des cases noires.
- On définit la distance orientée entre deux points : longueur du plus court chemin n'utilisant que des arêtes orientées (ce n'est pas une distance : pas symétrique)
- On part de la hauteur des sommets du bord B de R (commune à toute fonction de hauteur)
- On a alors une formule pour f_{\min}^R :

$$f_{\min}^R(x, y) = \max_{(z, t) \in B} h(z, t) - \bar{d}((z, t), (x, y))$$

- Si cette fonction n'est pas une fonction de hauteur, il n'y a pas de fonctions de hauteurs sur R , donc pas de pavages de R .